**DEVOIR DE SYNTHESE N° III Le : 11 - 05 – 2012**

**$4^{\text{ème}}$Sc-éxp 2 – 6**

**Exercice 1 :** **( 3 pts )**

**Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de quatre questions indépendantes.**

**Pour chacune d'elles, une seule des quatre propositions est exacte.**

**Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.**

1- Dans un stand de tir, la probabilité pour un tireur d'atteindre la cible est de 0,3.

On effectue $n$ tirs supposés indépendants. On désigne par $p_n$ la probabilité d'atteindre la cible au moins une fois sur ces $n$ tirs.

La valeur minimale de $n$ pour que $p_n$ soit supérieure ou égale à 0,9 est :

| | | | |
|---|---|---|---|
| *a*. 6 | *b*. 7 | *c*. 10 | *d*. 12 |

2- On observe la durée de fonctionnement, exprimée en heures, d'un moteur Diesel jusqu'à ce que survienne la première panne. Cette durée de fonctionnement est modélisée par une variable aléatoire X définie sur $]0;+\infty[$ et suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0002$. Ainsi, la probabilité que le moteur tombe en panne avant l'instant $t$ est $p(X \le t) = 1 - e^{-\lambda t}$.

La probabilité que le moteur fonctionne sans panne pendant plus de 10 000 heures est, au millième près :

| | | | |
|---|---|---|---|
| *a*. 0,271 | *b*. 0,135 | *c*. 0,865 | *d*. 0,729 |

3- Un joueur dispose d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. À chaque lancer, il gagne s'il obtient 2, 3, 4, 5 ou 6 ; il perd s'il obtient 1.

Une partie est constituée de 5 lancers du dé, successifs et indépendants.

La probabilité pour que le joueur perde 3 fois au cours d'une partie est :

| | | | |
|---|---|---|---|
| *a*. $\frac{125}{3888}$ | *b*. $\frac{625}{648}$ | *c*. $\frac{25}{7776}$ | *d*. $\frac{3}{5}$ |

4- Soient A et B deux événements indépendants d'un même univers $\Omega$ tels que $p(A) = 0,3$ et $p(A \cup B) = 0,65$. La probabilité de l'événement B est :

| | | | |
|---|---|---|---|
| *a*. 0,5 | *b*. 0,35 | *c*. 0,46 | *d*. 0,7 |

**Exercice2 :** **( 6 pts )**

Soient $f$ et $g$ les fonctions définies sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $f(x) = x\,e^{1-x}$ et $g(x) = x^2\,e^{1-x}$.

Les courbes représentatives des fonctions $f$ et $g$ dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ sont respectivement notées $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ leur tracé est donné ci-dessous.

1- Dresser les tableaux de variations des fonctions $f$ et $g$ .

2- Pour tout entier naturel $n$, on définit l'intégrale $I_n$ par : $I_0 = \int_0^1 e^{1-x}\,dx$ et, si $n \ge 1$, $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx$.

*a*) Calculer la valeur exacte de $I_0$.

*b*) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel $n$ : $I_{n+1} = -1 + (n+1)\,I_n$.

*c*) En déduire la valeur exacte de $I_1$, puis celle de $I_2$.

3- *a*) Étudier la position relative des courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.

*b*) On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise d'une part entre les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$, d'autre part entre les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

En exprimant $\mathcal{A}$ comme différence de deux aires que l'on précisera, démontrer l'égalité : $\mathcal{A} = 3 - e$.

4- Soit $a$ un réel strictement supérieur à 1.

On désigne par $\mathcal{S}(a)$ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise d'une part entre les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$, d'autre part entre les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = a$.

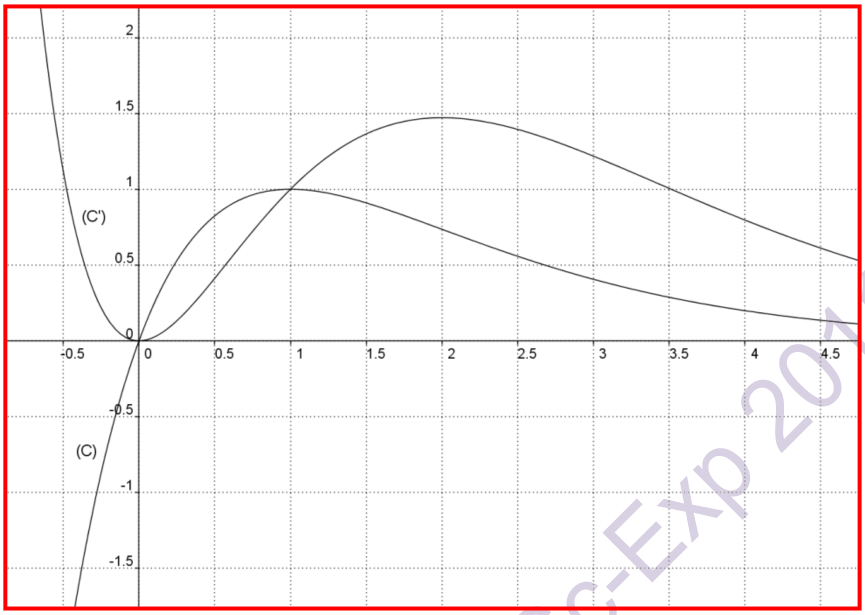
On admet que $\mathcal{S}(a)$ s'exprime par : $S(a) = 3 - e^{1-a}(a^2 + a + 1)$.

ZHIOUA KHALED 4ème Sc-Exp 2011-2012

L'objectif de cette question est de prouver qu'il existe une et une seule valeur de a pour laquelle les aires $\mathcal{A}$ et $\mathcal{S}(a)$ sont égales.

*a*) Démontrer que l'équation $\mathcal{S}(a)=\mathcal{A}$ est équivalente à l'équation : $e^{a} = a^{2} + a + 1$.

*b*) Conclure, quant à l'existence et l'unicité du réel *a*, solution du problème posé.




**<u>Exercice 3</u> : ( 4 pts )**

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points *A* (– 2 ; 0 ; 1), *B* (1 ; 2 ; – 1) et *C* (– 2 ; 2 ; 2).

1- *a*) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ puis les longueurs *AB* et *AC*.

*b*) En déduire une valeur approchée arrondie au degré près de l'angle $\widehat{BAC}$ .

*c*) En déduire que les points *A*, *B* et *C* ne sont pas alignés.

2- Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (*ABC*) est : $2x - y + 2z + 2 = 0$.

3- . Soient $P_1$ et $P_2$ les plans d'équations respectives $x + y - 3z + 3 = 0$ et $x - 2y + 6z = 0$.

Montrer que les plans $P_1$ et $P_2$ sont sécants selon une droite D dont un système d'équations paramétriques est $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3t - 1, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$.

4- Démontrer que la droite D et le plan (*ABC*) sont sécants et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

5- Soit S la sphère de centre $\Omega$ (1 ; – 3 ; 1) et de rayon *r* = 3.

*a*) Donner une équation cartésienne de la sphère S.

*b*) Étudier l'intersection de la sphère S et de la droite D.

*c*) Démontrer que le plan (*ABC*) est tangent à la sphère S.

ZHIOUA KHALED 4ème Sc-Exp 2011-2012

**Exercice 4 : ( 4 pts )**

Dans tout l'exercice, le détail des calculs n'est pas demandé. Les résultats seront arrondis à $10^{-3}$ près .

On veut étudier l'évolution des records de l'épreuve d'athlétisme du 100 mètres masculin.

Pour cela on cherche un ajustement des records pour en prévoir l'évolution.

On donne dans le tableau suivant certains records, établis depuis 1900.

| Année | 1900 | 1912 | 1921 | 1930 | 1964 | 1983 | 1991 | 1999 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rang de l'année, $x_i$ | 0 | 12 | 21 | 30 | 64 | 83 | 91 | 99 |
| Temps en secondes, $y_i$ | 10,80 | 10,60 | 10,40 | 10,30 | 10,06 | 9,93 | 9,86 | 9,79 |

1. Construire le nuage de point $M_i(x_i\,;\,y_i)$ avec $i$ compris entre 1 et 8, associé à cette série statistique double. On prendra comme unité graphique 1 cm pour dix ans en abscisse et 1 cm pour un dixième de seconde en ordonnées. On commencera les graduations au point de coordonnées (0 ; 9).

Peut-on envisager un ajustement affine à court terme ? Cet ajustement permet-il des prévisions pertinentes à long terme sur les records futurs ?

2. Après étude, on choisit de modéliser la situation par une autre courbe. On effectue les changements de variables suivants : $X = e^{-0,00924\,x}$ et $Y = \ln y$ .On obtient le tableau :

| $X_i = e^{-0,00924\,x_i}$ | 1 | 0,895 | 0,824 | 0,758 | 0,554 | 0,464 | 0,431 | 0,401 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y_i = \ln y_i$ | 2,380 | 2,361 | 2,342 | 2,332 | 2,309 | 2,296 | 2,288 | 2,281 |

Donner une équation de la droite de régression de Y en X obtenue par la méthode des moindres carrés.

En déduire que l'on peut modéliser une expression de $y$ en fonction de x sous la forme suivante :

$y = \exp\left( a\,e^{-0,00924\,x} + b \right)$ où a et b sont deux réels à déterminer.

A l'aide de cet ajustement, quel record du 100 mètres peut-on prévoir aux jeux olympique London 2012 ?

Calculer la limite en $+\infty$ de la fonction $f$ définie sur IR par l'expression suivante :

$$f(t) = \exp\left( 0,154\,e^{-0,00924\,t} + 2,221 \right).$$

Que peut-on en conclure, en utilisant ce modèle, quand aux records du cent mètres masculin à très long terme.

**Exercice 5 : ( 3 pts )**

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x}$

1. Montrer que la fonction u définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par $u(x) = x\,e^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).

2. On considère l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$ .

Résoudre l'équation différentielle (E').

3. Soit $v$ une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction $v$ est une solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $v - u$ est solution de l'équation différentielle (E').

4. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

5. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que g(0) = 2.

ZHIOUA KHALED 4ème Sc-Exp 2011-2012

## Exercice 1 :

1- Dans un stand de tir, la probabilité pour un tireur d'atteindre la cible est de 0,3.

$p_n = 1 - 0{,}7^n > 0{,}9$ signifie $0{,}7^n < 0{,}1$ signifie $n\ln(0{,}7) < \ln(0{,}1)$ signifie $n > \dfrac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}7)} = 6{,}455$ donc

| $n$ | 6 | 7 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|
| $p_n$ | 0,882351 | 0,9176457 | 0,971752475 | 0,986158713 |

La valeur minimale de $n$ pour que $p_n$ soit supérieure ou égale à 0,9 est 7

2- $p(X \le t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda t}\, dt = 1 - e^{-0{,}0002\, t}$

La probabilité que le moteur fonctionne sans panne pendant plus de 10 000 heures est :

$p(X \le 10\,000) = 1 - e^{-2} = 0{,}865$ au millième près.

3- On a une succession de 5 expériences aléatoires identiques et indépendantes, chacune d'elles a deux issues :

Réussite : le joueur perd la partie $p = \dfrac{1}{6}$ et Echec : le joueur gagne la partie $q = \dfrac{5}{6}$

donc la variable aléatoire X qui compte le nombre de parties gagnées suit une loi binomiale de paramètres

$\left(n = 5\,;\ p = \dfrac{1}{6}\right)$ $\quad p(X = 3) = C_5^3 \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^3 \times \left(\dfrac{5}{6}\right)^2 = \dfrac{125}{3888}$

4- A et B sont indépendants donc $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A) \times p(B)$

$p(A \cup B) = 0{,}3 + p(B) - 0{,}3\, p(B) = 0{,}65$

donc $0{,}7\, p(B) = 0{,}35$ et $p(B) = 0{,}5$

## Exercice 2 :

### 1. Étude des fonctions *f* et *g*

***a.*** $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} x\, e^{-x} = +\infty$ et $f(x) = x\, e^{-x} \times e$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ;

$g(x) = x^2 e^{-x} \times e$ or $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^{-x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.

***b.*** $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n e^{-x} = 0$ et $f(x) = x\, e^{-x} \times e$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ;

$g(x) = x^2 e^{-x} \times e$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

***c.*** *f* et *g* sont définies dérivables sur □ (produit de fonctions dérivables sur R)

$f = u\, v$ avec $\begin{cases} u(x) = x & \text{donc } u'(x) = 1 \\ v(x) = e^{1-x} & \text{donc } v'(x) = -e^{1-x} \end{cases}$ en appliquant que la dérivée de $e^u$ est $u'\, e^u$.

donc $f'(x) = e^{1-x} + x(-e^{1-x}) = (1-x)\, e^{1-x}$ donc $f'(x)$ a le même signe que $1 - x$.

$g = u\, v$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2 & \text{donc } u'(x) = 2x \\ v(x) = e^{1-x} & \text{donc } v'(x) = -e^{1-x} \end{cases}$ en appliquant que la dérivée de $e^u$ est $u'\, e^u$.

donc $g'(x) = 2x\, e^{1-x} + x^2(-e^{1-x}) = x(2-x)\, e^{1-x}$ donc $g'(x)$ a le même signe que $x(2-x)$

| $x$ | $-\infty$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | – | |

ZHIOUA KHALED 4ème Sc-Exp 2011-2012

| $f$ | $-\infty$ | ↗ | $1$ | ↘ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $4\,\mathrm{e}$ | ↘ | $0$ |

2. Calcul d'intégrales

*a.* $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{1-x}\right]_0^1 = \mathrm{e} - 1$

*b.* Soit $\begin{cases} u'(x) = \mathrm{e}^{1-x} & \text{alors} \quad u(x) = -\mathrm{e}^{1-x} \\ v(x) = x^{n+1} & \text{alors} \quad v'(x) = (n+1)\,x^n \end{cases}$

donc $\mathrm{I}_{n+1} = \left[-x^{n+1}\,\mathrm{e}^{1-x}\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 -(n+1)\,x^n\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x$

$\mathrm{I}_{n+1} = -1 + (n+1)\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x$ donc pour tout entier naturel $n$ : $I_{n+1} = -1 + (n+1)\,I_n$ .

*c.* Si $n = 0$, $I_{n+1} = -1 + (n+1)\,I_n$ ; $I_1 = -1 + I_0 = \mathrm{e} - 2$

Si $n = 1$, $I_{n+1} = -1 + (n+1)\,I_n$ ; $I_2 = -1 + 2\,I_1 = 2\,(\mathrm{e} - 2) - 1$

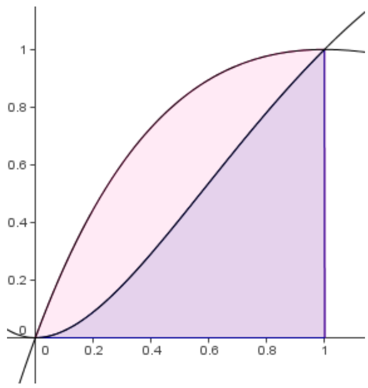
$I_2 = 2\,\mathrm{e} - 5$

3. Calcul d'une aire plane

*a.* $g(x) - f(x) = (x^2 - x)\,\mathrm{e}^{1-x}$ donc $g(x) - f(x)$ a le même signe que $x\,(x-1)$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 - x$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $g(x) - f(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| Position relative | C' est au dessus de C | point d'inter-section | C' est en dessous de C | point d'inter-section | C' est au dessus de C |

*b.* Sur [0 ; 1], C' est en dessous de C donc l'aire demandée est la différence entre l'aire $\mathrm{A}_1$ de la partie du plan comprise entre la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$ et l'aire $\mathrm{A}_2$ de la partie du plan comprise entre la courbe C', l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$




$\mathrm{A} = \displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^2\,\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x$ d'où $\mathrm{A} = \mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_2 = \mathrm{e} - 2 - (2\,\mathrm{e} - 5)$

$\mathrm{A} = 3 - \mathrm{e}$.

**4. Étude de l'égalité de deux aires**

*a.* $S(a) = \mathrm{A} \Leftrightarrow 3 - \mathrm{e}^{1-a}(a^2 + a + 1) = 3 - \mathrm{e} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{1-a}(a^2 + a + 1) = \mathrm{e} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-a}(a^2 + a + 1) = 1$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{a} = a^2 + a + 1$

*b.* Soit la fonction $h$ définie sur $[1\,;+\infty[$ par $h(x) = \mathrm{e}^{x} - (x^2 + x + 1)$

ZHIOUA KHALED 4ème Sc-Exp 2011-2012

$h$ est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et $h'(x) = e^{x} - 2x - 1$

$h'$ est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et $h''(x) = e^{x} - 2$

$x \geq 1$ donc $e^{x} \geq e > 2$ donc $h''(x) > 0$ sur $[1\,;+\infty[$

$h'$ est donc strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$, $h'(1) = e - 3$ donc $h'(1) < 0$,

$h'(x) = x\left(\dfrac{e^{x}}{x} - 2\right) - 1$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} h'(x) = +\infty$

$h'$ est définie continue strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$, $h'(1) < 0$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} h'(x) = +\infty$ donc l'équation $h'(x) = 0$ admet une seule solution $\beta$ sur $[1\,;+\infty[$.

| $x$ | $1$ | | $\beta$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h$ | $e-3$ | $\searrow$ | $h(\beta)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$h(1) < 0$, $h$ est strictement décroissante sur $[1\,;\beta]$, donc $h(\beta) < h(1) < 0$ et pour tout $x$ de $[1\,;\beta]$, $h(x) < 0$

$h(x) = x^{2}\left(\dfrac{e^{x}}{x^{2}} - 1 - \dfrac{1}{x}\right) - 1$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}}{x^{2}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

$h$ est définie continue strictement croissante sur $[\beta\,;+\infty[$, $h(\beta) < 0$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$ donc l'équation $h(x) = 0$ admet une seule solution $\alpha$ sur $[1\,;+\infty[$.

Il existe donc une seule valeur de $a$ ($a = \alpha$) telle que $S(a) = A$.

## Exercice 3 :

**1. *a.*** $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(3\,;2;-2)$

$\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(0\,;2\,;1)$ donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 3 \times 0 + 2 \times 2 - 2 \times 1$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2$

$AB^{2} = 3^{2} + 2^{2} + (-2)^{2} = 17$ et $AC^{2} = 2^{2} + 1^{2} = 5$ donc $AB = \sqrt{17}$ et $AC = \sqrt{5}$

***b.*** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos(\widehat{BAC})$ donc $\cos \widehat{BAC} = \dfrac{2}{\sqrt{85}}$

une valeur approchée arrondie au degré près de l'angle $\widehat{BAC}$ est 77°.

***c.*** L'angle $\widehat{BAC}$ n'étant ni nul, ni plat, les points A, B et C ne sont pas alignés.

**2.** Les coordonnées $(-2\,;0\,;1)$ du point A vérifient $2x - y + 2z + 2 = 0$ soit $-4 - 0 + 2 + 2 = 0$ égalité vraie ;

Les coordonnées $(1\,;2\,;-1)$ du point B vérifient $2x - y + 2z + 2 = 0$ soit $2 - 2 - 2 + 2 = 0$ égalité vraie ;

Les coordonnées $(-2\,;2\,;2)$ du point C vérifient $2x - y + 2z + 2 = 0$ soit $-4 - 2 + 4 + 2 = 0$ égalité vraie.

Les coordonnées des trois points non alignés A, B et C vérifient l'équation : $2x - y + 2z + 2 = 0$.

cette équation est donc l'une des équations du plan (ABC).

**3.** Soient $P_1$, et $P_2$ les plans d'équations respectives $x + y - 3z + 3 = 0$ et $x - 2y + 6z = 0$.

$P_1$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_1}$ $(1\,;1\,;-3)$ ;

$P_2$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_2}$ $(1\,;-2\,;6)$.

ZHIOUA KHALED 4ème Sc-Exp 2011-2012

$\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont manifestement pas colinéaires, donc les plans $P_1$ et $P_2$ ne sont pas parallèles et distincts : ils sont donc sécants suivant une droite D dont les coordonnées vérifient : $\begin{cases} x+y-3z+3=0 \\ x-2y+6z=0 \end{cases}$. soit en posant $z = t$ : $\begin{cases} L_1:\ x+y=3t-3 \\ L_2:\ x-2y=-6t. \\ L_3:\ z=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_1:\ x+y=3t+3 \\ L_1-L_2:\ 3y=9t-3 \\ L_3:\ z=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_1:\ x+y=3t+3 \\ L_2:\ y=3t-1 \\ L_3:\ z=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_1:\ x+3t-1=3t+3 \\ L_2:\ y=3t-1 \\ L_3:\ z=t \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x=-2 \\ y=-1+3t \\ z=t \end{cases}$ ,$t \in \mathbb{R}$

**4.** D a pour vecteur directeur $\vec{u}\,(0\,;3\,;1)$ et le plan (ABC) a pour vecteur normal $\vec{n}\,(2\,;-1\,;2)$.

$\vec{u}\,.\,\vec{n} = -3+2 = -1$ donc $\vec{u}\,.\,\vec{n} \neq 0$, ces vecteurs ne sont pas orthogonaux, donc la droite D n'est pas parallèle au plan (ABC).

Le point commun est tel que $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1+3t \\ z=t \end{cases}$ et $2x-y+2z+2=0$ donc $-4-3t+1+2t+2=0 \Leftrightarrow t=-1$

Le point commun à D et au plan (ABC) a pour coordonnées $(-2\,;-4\,;-1)$.

**5. *a.*** $M \in S \Leftrightarrow \Omega M^2 = 9 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+3)^2+(z-1)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x+6y-2z+2=0$

Une équation cartésienne de la sphère S est $x^2+y^2+z^2-2x+6y-2z+2=0$

***b.*** Le point commun est tel que :

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=-1+3t \\ z=t \end{cases} \text{ et } x^2+y^2+z^2-2x+6y-2z+2=0$$

donc $(-2)^2+(3t-1)^2+t^2-2\times(-2)+6(3t-1)-2t+2=0$

$\Leftrightarrow 4+9t^2+1-6t+t^2+4+18t-6-2t+2=0$

$\Leftrightarrow 10t^2+10t+5=0 \Leftrightarrow 2t^2+2t+1=0.$

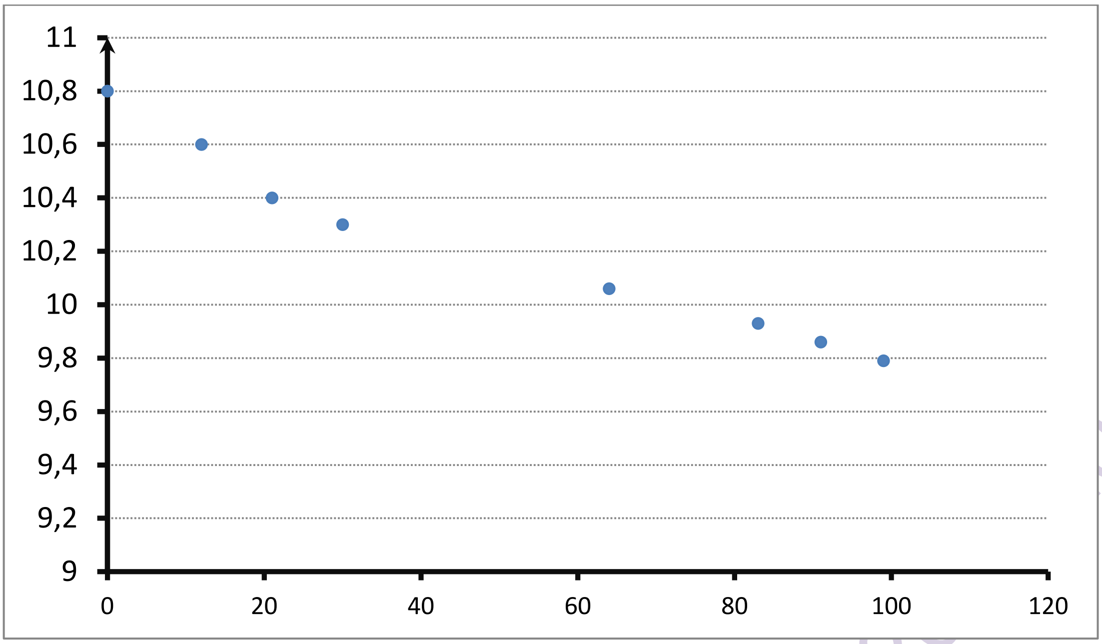
On a $\Delta = 4-8 = -4 < 0$ : il n'y a pas de solution : conclusion la droite D ne coupe pas la sphère.

***c.*** La distance de $\Omega$ au plan (ABC) est : $d = \dfrac{|2\times1-1\times(-3)+2\times1+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = 3$

la distance du point $\Omega$ au plan (ABC) est égal au rayon de la sphère, donc le plan (ABC) est tangent à la sphère S.

**Exercice 4 :**

ZHIOUA KHALED 4ème Sc-Exp 2011-2012




1. Le coefficient de corrélation est – 0,981. Un ajustement affine semble légitime .
2. $Y = 0{,}154\,X + 2{,}221$ donc $\ln y = \mathrm{e}^{-0{,}154\,x} + 2{,}221$ donc $y = \exp(\mathrm{e}^{-0{,}154\,x} + 2{,}221)$.

Le rang de l'année 2012 est 112 donc le record du 100 mètres en 2012 est 10,79 $s$ ce qui est peu vraisemblable.

Calculer la limite en $+\infty$ de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression suivante :

$$f(t) = \exp\left(0{,}154\,\mathrm{e}^{-0{,}00924\,t} + 2{,}221\right).$$

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \mathrm{e}^{2{,}221}$ donc d'après ce modèle, le record du 100 mètres décroitra jusqu'à environ 9,216 secondes . A très long terme le record de 100 mètres ne dépasse pas 9,2 seconde .

## Exercice 5

1) $u'(x) = \mathrm{e}^{-x} + x(-\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-x} - u(x)$ donc $u'(x) + u(x) = \mathrm{e}^{-x}$

La fonction $u$ définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $u(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle (E).

2) Les solutions de (E') sont les fonctions de la forme $x \to \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-x}$ où C est une constante réelle.

3) $v - u$ solution de (E') $\Leftrightarrow (v-u)' + (v-u) = 0 \Leftrightarrow v' - u' + v - u = 0 \Leftrightarrow v' + v = u' + u$

or pour tout $x$ réel, $u'(x) + u(x) = \mathrm{e}^{-x}$

$v - u$ solution de (E') $\Leftrightarrow$ pour tout $x$ réel, $v'(x) + v(x) = \mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow v$ solution de (E)

4) $v$ solution de (E) $\Leftrightarrow v - u$ solution de (E') $\Leftrightarrow v - u$ de la forme $\mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-x}$

$\Leftrightarrow$ pour tout $x$ réel, $v(x) = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-x} + x\,\mathrm{e}^{-x}$ où C est une constante réelle.

5) $g$ solution de l'équation différentielle (E) $\Leftrightarrow$ il existe un constante réelle C telle que pour tout $x$ réel, $g(x) = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-x} + x\,\mathrm{e}^{-x}$ or $g(0) = 2$ donc $\mathrm{C} = 2$ donc pour tout $x$ réel, $g(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}$ .

ZHIOUA KHALED 4ème Sc-Exp 2012