LYCEE : IBN ABI DHIAF
MANOUBA
EPREUVE DE :

MATHEMATIQUES

DEVOIR DE SYNTHESE N°3

CLASSE : 4ème Sc-exp 2 & 5

ANNEE SCOLAIRE : 2008 -2009

DUREE : 3 HEURES * DATE : 08 – 05 - 2009

Exercice 1 : 3 points

Indiquer sur la copie la bonne réponse :

1- Parmi les fonctions proposées, indiquer celles qui sont solutions de l' équation différentielle du second ordre de fonction inconnue y de la variable x : $y'' + 4y = 0$.

a) $y = e^{-4x}$ b) $y = 3\sin 2x$ c) $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

2- On admet que la fonction F définie sur $]0, +\infty[$ par $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(\ln x)^2$ est une primitive de la fonction f. On pose $A = \int_1^e f(x)\,dx$.

Parmi les trois propositions suivantes , indiquer la bonne réponse :

a) $A = e^2$ b) $A = -e^2$ c) $A = \frac{1}{2}e^2$

3- La durée de vie en années d'un composant électronique suit une loi exponentielle de paramètre 0,2.
La probabilité que ce composant électronique ait une durée de vie strictement supérieure à 5 ans est :

a) $1 - \frac{1}{e}$ b) $\frac{1}{e}$ c) $\frac{1}{0{,}2}(e-1)$

Exercice 2 :4 points

On a relevé lors de six années consécutives le chiffre d'affaire d'une entreprise de prêt-à-porter de luxe créée en 2000. Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang de l'année, x_i	1	2	3	4	5	6
Chiffre d'affaire y_i (en dinars)	160 000	220 000	290 000	390 000	540 000	730 000

1. Pour $i = 1, 2, \ldots, 5$ on pose $z_i = \ln y_i$.
   a) Recopier et compléter le tableau suivant (donner une valeur approchée arrondie à 10^{-2} près de chacun des résultats) :

x_i	1	2	3	4	5	6
$z_i = \ln y_i$						

b) Représenter sur du papier millimétré le nuage de points associés à la série statistique $(x_i\,;\,z_i)$ dans un repère orthonormal du plan (unité : 2 cm en commençant à la graduation 10 sur l'axe des ordonnées).

c) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement affine de z en x par la méthode des moindres carrés (on obtiendra une équation de la forme $z = ax + b$ où les coefficients a et b seront arrondis à 10^{-2} près).

d) Déduire de ce qui précède une expression de y en fonction de x sous la forme $y = k\,e^{ax}$, où k est un réel à déterminer et a le coefficient trouvé à la question précédente (le coefficient k sera arrondi à l'unité).

2. On note C la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $C(x) = 120\,000\, e^{0,3x}$.

a) Résoudre par le calcul l'inéquation $C(x) \geq 2\,000\,000$.

b) On admet que $C(x_i)$ représente le chiffre d'affaire de l'entreprise pour l'année de rang x_i.
Quel chiffre d'affaire peut-on prévoir pour l'année 2009 (on arrondira le résultat au millier de dinars près) ?
À partir de quelle année le chiffre d'affaire dépassera-t-il 2 millions de dinars ?

<u>Exercice 3:</u> 5points

Au rayon « image et son » d'un grand magasin, un téléviseur et un lecteur de DVD sont en promotion pendant une semaine. Une personne se présente :

- la probabilité qu'elle achète le téléviseur est $\frac{3}{5}$
- la probabilité qu'elle achète le lecteur de DVD si elle achète le téléviseur est $\frac{7}{10}$
- la probabilité qu'elle achète le lecteur de DVD si elle n'achète pas le téléviseur est $\frac{1}{10}$.

On désigne par T l'événement : « la personne achète le téléviseur » et par L l'événement : « la personne achète le lecteur de DVD ».

1) Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.
Déterminer les probabilités des événements suivants (les résultats seront donnés sous forme de fractions) :
   a. « la personne achète les deux appareils ».
   b. « la personne achète le lecteur de DVD ».
   c. « la personne n'achète aucun des deux appareils ».

2) Montrer que, si la personne achète le lecteur de DVD, la probabilité qu'elle achète aussi le téléviseur est $\frac{21}{23}$

3) Avant la promotion, le téléviseur coûtait 500 D et le lecteur de DVD 200 D.
Pendant cette semaine, le magasin fait une remise de 15% pour l'achat d'un seul des deux appareils et de 25% pour l'achat des deux appareils.
On désigne par X la dépense effective (en D) de la personne.
   a. Déterminer les valeurs possibles de X.
   b. Déterminer la loi de probabilité de X.
   c. Calculer l'espérance mathématique de X.

<u>Exercice 4 </u>:8points

<u>A/</u> On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = e^{-x}$.

1. Démontrer que la fonction u définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $u(x) = xe^{-x}$ est une solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' + y = 0$.
3. Démontrer qu'une fonction y, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, est solution de (E) si et seulement si $y - u$ est solution de (E_0).
4. En déduire toutes les solutions de (E).
5. Déterminer la fonction f, solution de (E), qui prend la valeur 2 en 0.

<u>B/</u> Soit f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+2)e^{-x}$.

On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
3. En déduire le tableau de variations de f.

C/ 1. On considère la suite d'intégrales (I_n) définie par $I_0 = \int_{-2}^{0} e^{-x}dx$ et pour tout entier naturel $n \neq 0$ par :

$$I_n = \int_{-2}^{0} x^n e^{-x}dx .$$

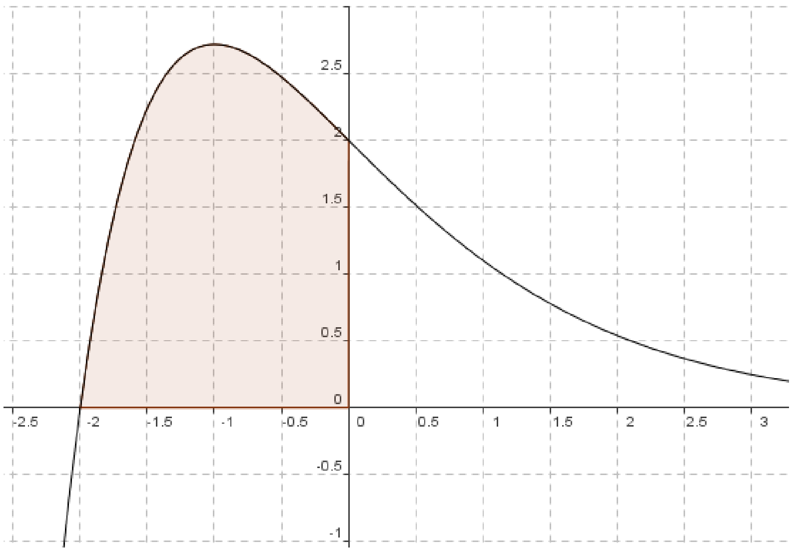
a. Calculer la valeur exacte de l'intégrale I_0.

b. En utilisant une intégration par parties, démontrer l'égalité : $I_{n+1} = (-2)^{n+1}e^2 + (n+1)I_n$.

c. En déduire les valeurs exactes des intégrales I_1 et I_2.

2. Le graphique ci-dessous représente une courbe *C* qui est la représentation graphique d'une fonction f définie à la partie B.

Soit *S* l'aire de la partie hachurée (en unité d'aire) ; exprimer *S* en fonction de I_1 et I_0 et en déduire sa valeur exacte.



BON TRAVAIL