Série Arithmétiques 4M

Exercice 1 :

1- Soit E = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Déterminer les paires $\{a, b\}$ d'entiers distincts de E tels que la reste de la division euclidienne de ab par 11 soit 1 .

2-Soit n un entier naturel supérieur ou égale à 3 .

a)l'entier (n - 1) ! + 1 est-il pair ?

b)l'entier (n – 1) ! + 1 est-il divisible par un entier naturel pair ?

c)Prouver que l'entier (15 – 1) ! + 1 n'est pas divisible par 15 .

d)l'entier (11 – 1) ! + 1 est-il divisible par 11 ?

Exercice 2 :

1-a) Etudier suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division euclidienne de 7^n par 10 .

b) On pose $A = 1 + 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + \ldots\ldots + 7^{11}$. Quelle est le chiffre des unités de A .

2-a) Enoncer le théorème de Fermat .

b) Prouver à l'aide du théorème de Fermat que $11^7 - 11 \equiv 0 \ (\text{mod } 7)$. En déduire le reste de la division euclidienne de $(11^8 - 11^5)(11^3 + 1)$ par 7 .

3-Répondre par vrais ou faux en justifiant :

* Pour tout $m \in IN$, $a \equiv b \ (\text{mod } n)$ alors $a^m \equiv b^m \ (\text{mod } n)$, où $n \in IN^*$.

*Soit deux entiers a et b et $n \in IN^*$, $ab \equiv 0 \ (\text{mod } n)$ signifie $a \equiv 0 \ (\text{mod } n)$ ou $b \equiv 0 \ (\text{mod } n)$.

* Soit a un entier , $a \equiv 5 \ (\text{mod } 143)$ alors $a \equiv 5 \ (\text{mod } 13)$.

Exercice 3 :

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.

Proposition 1 : « Pour tout entier naturel n, 3 divise le nombre $2^{2n} - 1$ ».

Proposition 2 : « Si un entier relatif x est solution de l'équation $x^2 + x \equiv 0 \pmod{6}$ alors $x \equiv 0 \pmod{3}$ ».

Cocher la réponse exacte.

1) Soit n un entier , si $n \equiv 0[5]$ et $n \equiv 0[7]$ alors :

☐ $n \equiv 0[35]$ ☐ $n \equiv 5[35]$ ☐ $n \equiv 7[35]$

2) ☐ $100^{22} \equiv 0[23]$ ☐ $100^{22} \equiv 1[23]$ ☐ $100^{23} \equiv 1[23]$

Indiquer la réponse exacte :

		A	B	C
1	$N = 2008^{2009}$	$N \equiv 3 \ (\text{mod } 5)$	$N \equiv 2 \ (\text{mod } 5)$	$N \equiv 1 \ (\text{mod } 5)$
2	L'équation dans Z : $x^2 - 3x + 1 \equiv 0 \ (\text{mod } 7)$	n'admet pas de solution	Les solutions vérifient $x \equiv 1 \ (\text{mod } 7)$	Les solutions vérifient $x \equiv 1 \ (\text{mod } 7)$ ou $x \equiv 2 \ (\text{mod } 7)$
3	$A = a^{19} - a^7$	$A \equiv 0 \ (\text{mod } 13)$	$A \equiv 1 \ (\text{mod } 13)$	$A \equiv 5 \ (\text{mod } 13)$

ZHIOUA KHALED

Exercice 4 :

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par $u_0 = 14$, $u_{n+1} = 5u_n - 6$ pour tout entier naturel n.
1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} \equiv u_n (\text{modulo } 4)$. En déduire que pour tout entier naturel k,

$$u_{2k} \equiv 2 (\text{modulo } 4) \text{ et } u_{2k+1} \equiv 0 (\text{modulo } 4).$$

3. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2u_n = 5^{n+2} + 3$.
b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $2u_n \equiv 28 (\text{modulo } 100)$.
4. Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.

Exercice 5 :

1- Déterminer dans chacun des cas ci-dessous le quotient et le reste de la division de a par b .
a = 789436 et b = 3695
a = 789436 et b = - 3695
2- Déterminer les entiers n vérifiant : $n \equiv 6$ modulo 11 et $-6 \leq n \leq 20$.
3- a) Résoudre dans $\mathbb{Z}$, $x^2 + x + 1 \equiv 0 \mod 4$. b) $\begin{cases} x \equiv 2 \mod 3 \\ x \equiv 2 \mod 5 \end{cases}$
4- Montrer que 7 divise $(n^3 + 1)(n^4 - n)$ pour tout entier naturel n .
déterminer les entiers n tels que $n^{500} \equiv 1 \mod 7$
5- Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $3^{3n} \equiv 2^n \mod 5$.
En déduire alors qu'on a : $3^{3n+2} + 2^{n+4} \equiv 0 \mod 5$.
6- a) Résoudre dans Z / $x^2 \equiv 4 \mod 9$.
b) En déduire la résolution de : $x^2 + 8x + 3 \equiv 0 \pmod 9$

Exercice 6 :

1- On admet que 1999 est un nombre premier .
Déterminer l'ensemble des couples (a , b) d'entiers naturels admettant pour somme 11994 et pour pgcd 1999.
2- On considère l'équation (E) $n^2 - Sn + 11994 = 0$ où S est un entier naturel.
a) Peut-on déterminer un entier S tel que 3 soit une solution de (E) . Si oui , préciser la deuxième solution .
b)Peut-on déterminer un entier S tel que 5 soit soit solution de (E) ?
c)Montrer que tout entier n solution de (E) est un diviseur de 11994 . En déduire toutes les solutions possibles de S telles que (E) admette deux solutions entières .

Exercice 7 :

Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que n + 4 divise n + 17.
Soit p et q deux entiers naturels non nuls.
1-Montrer que $2^p \equiv 1 \ [\text{mod } (2^p - 1)]$
2-En déduire que $2^{pq} \equiv 1 \ [\text{mod } (2^p - 1)]$
3_En déduire que $2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$ et aussi par $2^q - 1$. Application : en déduire que $2^{2006} - 1$ est divisible par 3 et aussi par 131071.
4-Démontrer que si $2^n - 1$ est un nombre premier alors n est un nombre premier.

ZHIOUA KHALED