LYCEE IBN ABI DHIAF MANOUBA	
Epreuve : Mathématiques	**Devoir de synthèse n° 3**
Classes : $4^{ème}$ M 1 - 2 **Le : 12 - 05 - 2017**	**Durée : 4 h**

<u>Exercice 1 :</u> (3 pts)

On étudie la croissance d'une plante à partir d'un instant considère comme initial.
Le tableau ci-dessous indique le diamètre D de la tige après T semaines

Temps T en semaines	0	2	6	8	10	12
Diamètre D en centimètres	0.4	1.2	5.4	5.8	6.4	6.9

1/a) Représenter le nuage de points associe à cette série statistique ainsi que le point moyen G
b) Que peut-on interpréter sur la covariance de (T,D)

2/ On pose : $U = \ln\left(\frac{8}{D} - 1\right)$, (les nombres sont arrondis aux 10^{-2} prés)

a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série (T,U) , interpréter le résultat obtenu
b) Déterminer par les moindres carrées une équation de la droite d'ajustement de U en T
c) Vérifier que pour cette plante, le diamètre de sa tige principale est donné par la relation

$$D(t) = \frac{8}{1 + 12{,}06\, e^{-0.4t}}$$

3) a) Tracer dans le repère précédent la fonction : $f : t \to D(t)$ pour $t \geq 0$
b) Le diamètre de la plante dépassera –t-il 8 cm ?

<u>Exercice 2</u> : (4 pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on associe à tout point M d'affixe z, le point M' d'affixe z' tel que $z' = -z^2 - (1 - 3i)z + 4 - 3i$
On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.
1/ Calculer x' et y' en fonction de x et y.

2/ a) Démontrer que, lorsque M' décrit l'axe des ordonnées, le point M décrit la courbe (H) d'équation : $x^2 - y^2 + x + 3y - 4 = 0$.
b) Déterminer la nature de (H) et ses éléments caractéristiques.
c) Tracer la courbe (H) .

3/ a) Démontrer que, lorsque M' décrit l'axe des abscisses, le point M décrit la courbe (H') d'équation : $2xy - 3x + y + 3 = 0$.
b) Déterminer la nature de (H'), son centre et ses asymptotes.
c) Tracer (H').

<u>Exercice 3 :</u> (4 pts)

On s'intéresse à deux types de pièces électroniques, P_1 et P_2, qui entrent dans la fabrication d'une boîte de vitesses automatique.
Une seule pièce de type P_1 et une seule pièce de type P_2 sont nécessaires par boîte.
L'usine se fournit auprès de deux sous-traitants et deux seulement S_1 et S_2.

Le sous-traitant S_1 produit 80 % des pièces de type P_1 et 40 % de pièces de type P_2.
Le sous-traitant S_2 produit 20 % des pièces de type P_1 et 60 % de pièces de type P_2.

1) Un employé de l'usine réunit toutes les pièces P_1 et P_2 destinées à être incorporées dans un certain nombre de boîtes de vitesses. Il y a donc autant de pièces de chaque type. Il tire une pièce au hasard.
a) Déterminer la probabilité de tirer une pièce P_1 .
b) Déterminer la probabilité pour que la pièce tirée soit du type P_1 et qu'elle vienne de S_1.
c) Montrer que la probabilité que la pièce tirée vienne de S_1 est égale à 0,6.

2) Il y a 200 pièces au total. Cette fois l'employé tire deux pièces simultanément. On suppose que tous les tirages sont équiprobables.
a) Déterminer la probabilité de tirer deux pièces du type P_1.
b) Déterminer la probabilité de tirer une pièce de chaque type.
c) Montrer que la probabilité de tirer deux pièces fabriquées par le même sous traitant est égale à $\frac{103}{199}$

3) La durée de vie exprimée en années des pièces P_1 et P_2 suit une loi exponentielle dont le paramètre λ est donné dans le tableau suivant :

λ	P_1	P_2
S_1	0,2	0,25
S_2	0,1	0,125

Montrer qu'une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité qu'une pièce P_1 fabriquée par S_1 dure moins de 5 ans est égale à 0,6321.

<u>Exercice 4 :</u> (4 pts)

1/ On considère dans $\mathbb{Z} x \mathbb{Z}$ l'équation : **(E)** : $7x - 13y = 2$

a) Montrer que si (x , y) est solution de (E) alors $x \equiv 4 \pmod{13}$.

b) Résoudre alors l'équation **(E)** .

2/ Résoudre dans $\mathbb{Z} x \mathbb{Z}$ l'équation : **(E')** : $7x - 13y = -4$.

Soit dans $\mathbb{Z}$ le système **(S)** : $\begin{cases} n \equiv 5 \ (mod\ 13) \\ n \equiv 3 \ (mod\ 7) \end{cases}$

3/ Montrer qu'un entier n est solution de **(S)** si et seulement si $n \equiv 31 \pmod{91}$.

4/ Pour tout entier n , on pose $a = 13n - 8$ et $b = 7n - 4$.

a) Montrer que le couple (a , b) est une solution de l'équation (**E'**) et en déduire les valeurs possibles de $a \wedge b$.

b) Déterminer l'ensemble des valeurs de n pour lesquels $a \wedge b = 2$.

<u>Exercice 5 :</u> (5 pts)

1 / Soit ($\mathcal{E}$) l'ensemble des fonctions dérivables et strictement négatives sur les intervalles de la forme $]a,+\infty[$, (a ∈ IR) et vérifiant la relation : y + y^3= - 2y' .

a) On pose z = $\frac{1}{y^2}$. Montrer que y ∈ $(\mathcal{E})$ si et seulement si z est solution de l'équation différentielle (E) : z '- z = 1

b) Résoudre l'équation (E) puis vérifier que la fonction définie sur $]-ln2\,,+\infty[$ par f(x) = $\frac{-1}{\sqrt{2e^x-1}}$ est un élément de ($\mathcal{E}$)

2/ Soit g la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right[$ par g(x) = - ln (1+ sin x)

a) Dresser le tableau de variations de g

b) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $]-ln2,+\infty[$

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]-ln2,+\infty[$ et que $(g^{-1})'(x)$ = f(x)

3/ Pour n∈ IN* et x ≥ 0 , on pose F_n(x)= $\int_0^x (f(t))^{2n}\,dt$

a) Donner le sens de variations de F_n

b) Calculer F_1(x) et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} F_1$(x)= ln2

c) Montrer que pour tout réel t ≥ 0 ; - $e^{\frac{-t}{2}} \leq f(t) \leq 0$

d) En déduire que F_n(x) ≤ $\frac{1}{n}$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} F_n$(x) est finie.

4/ On pose U_n= $\lim\limits_{x\to+\infty} F_n$(x). <u>On se propose dans la suite de déterminer</u> U_n.

a) Montrer que F_{n+1}(x) + F_n(x) = - $\frac{1}{n}$ $[(f(x))^{2n} - 1]$

b) En déduire que U_{n+1} + U_n= $\frac{1}{n}$

5/ On pose $W_n = (-1)^n U_n$; n ∈ IN*. Vérifier que : W_{n+1} - W_n = $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

En déduire que pour n ≥ 2 ; U_n = $(-1)^n\left[-\,ln2+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right]$