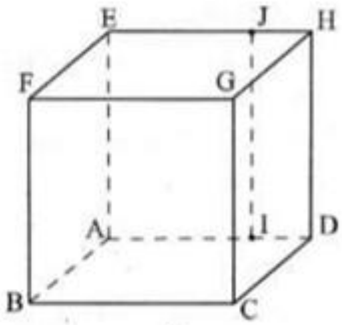
	Lycée Ibn Abi Dhiaf Manouba Classe : 4 ème Math 2-3	Devoir de Contrôle N°3 Mathématiques	Le : 12-03-2018 Durée : 2h

Exrcice 1: (5 points)

Dans la figure ci-contre,

- ABCDEFGH est un cube d'arête 1.
- $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{EJ} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AD}$



On note $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{AE}$ et on munit l'espace du repère orthonormé direct $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) a) Déterminer les coordonnées des points F, G, I et J.

b) Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (IJ) est $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ z = \alpha \end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dans la suite de l'exercice α est un réel et M est un point de la droite (IJ) de coordonnées $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \alpha\right)$.

2) a) Vérifier que $\overrightarrow{AF} \wedge \overrightarrow{AM} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \alpha\vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}$ et que $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BM} = \alpha\vec{i} + \vec{k}$.

b) En déduire que les triangles AFM et BCM ont la même aire.

3) a) Montrer que $\left(\overrightarrow{AF} \wedge \overrightarrow{AM}\right).\overrightarrow{AG} = -\alpha$ et que $\left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BM}\right).\overrightarrow{BG} = 1$.

b) Montrer que

(M,A,F et G sont coplanaires) si et seulement si (M et I sont confondus).

c) Déterminer les points M de la droite (IJ) pour lesquels AFMG et BCMG sont deux tétraèdres de même volume .

Exercice 2 :(5 points)

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre I et A un point de $\mathscr{C}$. On désigne par B le point image de A par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et par O le milieu du segment [AB] ; la demi droite [OI) coupe le cercle $\mathscr{C}$ en D.

1) On désigne par S la similitude directe de centre A qui transforme I en O.
   Déterminer le rapport k et l'angle α de S.

2) On désigne par K le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABD.
   a) Montrer que le triangle ADK est rectangle isocèle en K.
   b) En déduire que S(D) = K.
   c) On pose J = A*D, montrer que I, J et K sont alignés.

3) Soit σ la similitude indirecte qui transforme J en K et K en A.
   a) Déterminer le rapport k' de σ.
   b) Soit Ω le centre de la similitude indirecte σ ; caractériser $\sigma o \sigma$.
   Déterminer $\sigma o \sigma(J)$ et en déduire que $\Omega = D$.
   c) Déterminer l'axe de σ et montrer que $\sigma(I) = H$ où H est l'orthocentre du triangle ABD.

Exercice 3 : (5 points)

On considère l'équation (E) : $6x + 7y = 57$.

1) Montrer que si (x , y) est une solution de (E) alors $y \equiv 0 \pmod 3$.

2) a) Déterminer une solution particulière de (E) .
   b) Résoudre dans Z l'équation (E) .
   c) Soit $d = x \wedge y$ où (x , y) est une solution de (E) .
   Quelles sont les valeurs possibles de d . En déduire les solutions de (E) lorsque d = 57 .

3) Soit ($(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace . On considère le plan P
   d'équation cartésienne :
   $6x + 7y + 8z - 57 = 0$.
   Parmi les points appartenant à la fois à P et au plan P' : z = 0 ; montrer qu'un seul point a pour coordonnées des entiers naturels . Déterminer les coordonnées de ce point .

Exercice 4 : (5 points)

A/ Soit f la fonction définie sur] -ln2 , +∞ [par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2e^x - 1}}$.

On désigne par $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que pour tout $x \in \,]-\ln 2, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{-e^x}{(2e^x - 1)\sqrt{2e^x - 1}}$ où f ' désigne
   la fonction dérivée de f .
   b) Etablire le tableau de variations de f . Préciser f (0) .
   c) Construire $\mathcal{C}_f$.

2) Soit g la fonction définie sur [0 , π [par $g(x) = -\ln(1 + \cos x)$.
   a) Montrer que g est une bijection de [0 , π [sur [-ln2 , +∞ [.
   b) On désigne par h la fonction réciproque de g . Montrer que h est dérivable sur] -ln2 , +∞ [
   et que h' (x) = f (x) .
   On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la région du plan limitée par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations :
   x = 0 et x = ln2 . Montrer que $\mathcal{A} = \dfrac{\pi}{6}$.