Chapitre : 9	Cours : Equations différentielles	Prof : Mr Gary Badreddine
$4^{ème}$ Année : Section - Mathématiques	Lycée : El Montazeh El Mourouj 2	Année scolaire 2016/2017

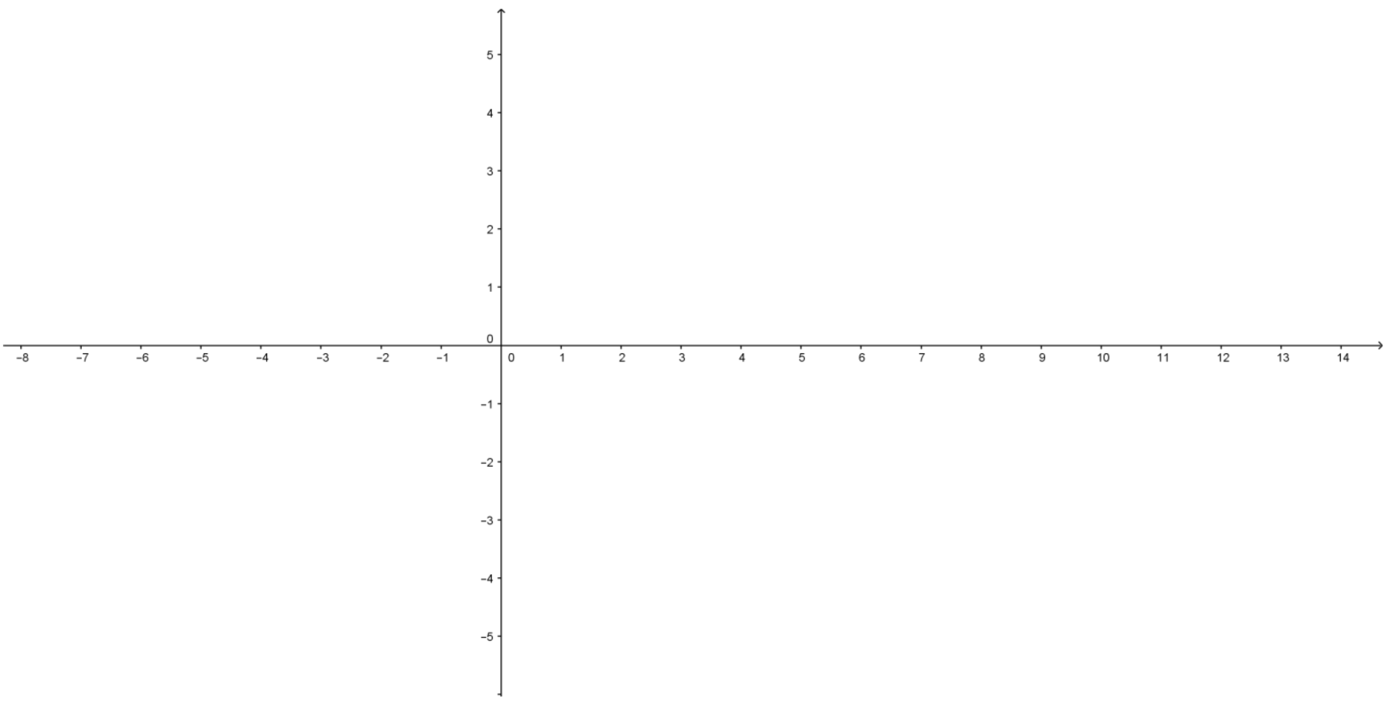
I. Définition

1. Activité 1 Page 190

1. Soit la fonction $f : x \longmapsto e^{-x}$ .déterminer une relation entre f' et f .

2. Reprendre la même question pour les fonctions $g : x \longmapsto -2e^{-x}$ et $h : x \longmapsto 0{,}5\, e^{-x}$.

3. Représenter les fonctions f , g et h dans le même repère.



2. vocabulaire Page 190

une équation de la forme $y' = ay$, où l'inconnue y est une fonction et a est un réel , est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficient constante .

Résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation de la forme $y' = ay$, c'est trouver toutes les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $y' = ay$.

Ces fonctions sont appelées solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = ay$.

3. Théorème Page 190

Soit a un réel. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $x \longmapsto ke^{ax}$, où k est un réel quelconque.

4. Activité 4 Page 191

1. a. Résoudre l'équation différentielle $2y' + 3y = 0$.

b. Montrer qu'il existe une unique solution f de (E) vérifiant $f(0) = -3$.

c. Représenter graphiquement cette solution.

5. Théorème Page 191

Soit a un réel non nul. Pour tous réels x_0 et y_0 l'équation $y' = a\,y$ admet une unique solution qui prend la valeur y_0 en x_0 .
C'est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto y_0\, e^{a\,(x-x_0)}$.

6. Activité 5 Page 192

Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Représenter graphiquement la fonction f dont la courbe (C_f) passe par le point $A(1,2)$ et telle que la tangente en tout point M de (C_f) a un coefficient directeur égal au double de l'ordonnée de M .

II. Equations différentielles de type $y' = ay + b$,où a et b sont deux réels tels que $\neq 0$.

1. Théorème Page 191

Soit a et b deux réels tels que $\neq 0$.
L'ensemble des solutions de l'équations différentielles $y' = ay + b$ est l'ensemble des fonctions $f : x \longmapsto k\, e^{a\,x} - \frac{b}{a}$, k est un réel quelconque .
De plus pour tous réels x_0 , y_0 , la fonction $f : x \longmapsto (y_0 + \frac{b}{a})\, e^{a(\,x-x_0)} - \frac{b}{a}$
Est l'unique solution de $y' = ay + b$ telle que $f(x_0) = y_0$.

2. Activité 2 Page 193

Donner, dans chacun des cas ci-dessous, la solution f de l'équation différentielle et la représenter.

a. $\sqrt{2}\, y' - 2y = 1 \;, f(0) = -1.$

b. $\sqrt{2}\, y' - 2y = 1 \;, f(0) = -\frac{1}{2}.$

III. Equations différentielles de type $y'' + \omega^2 y = 0$, ω réel

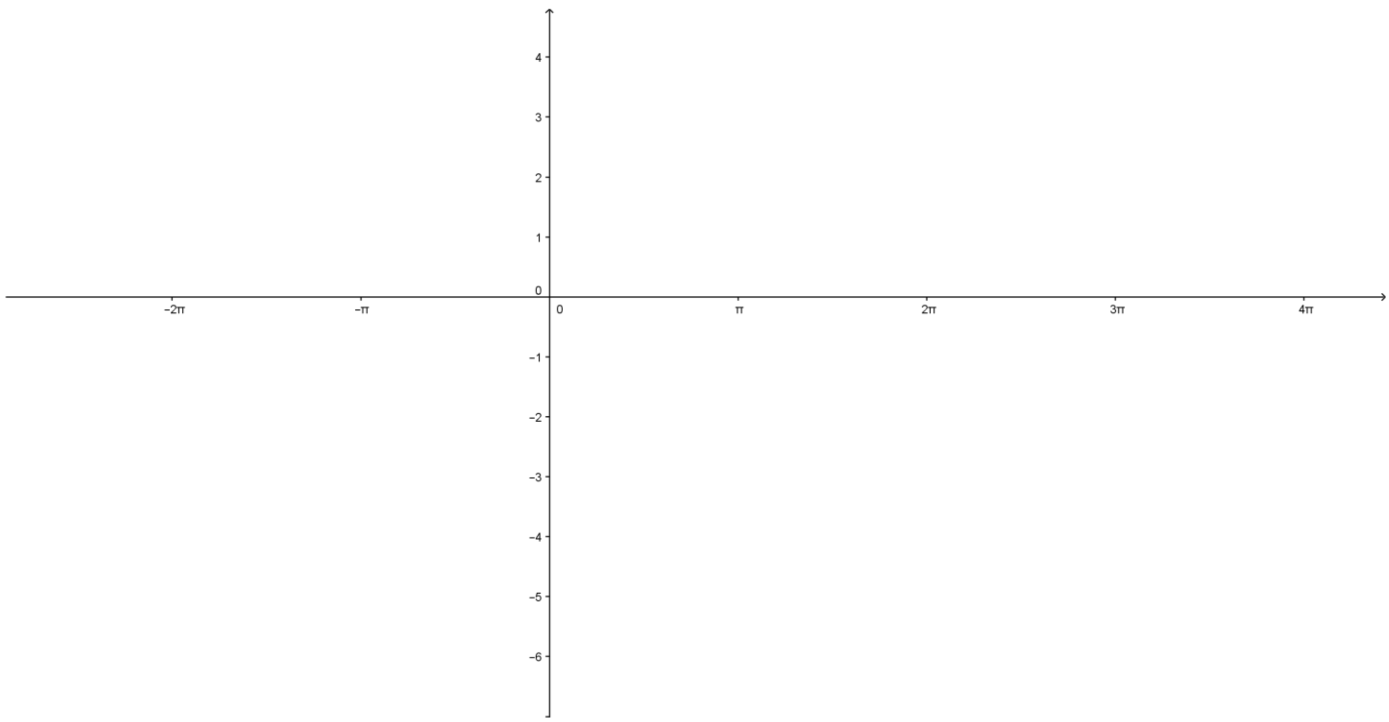
1. Activité 1 page 194

1. On considère la fonction $f : \mapsto \sin(x) + \cos(x)$.

a. Déterminer les réels $r > 0$ et φ appartenant à $]-\pi, \pi]$ tel que $f(x) = r \cos(x - \varphi)$ pour tout réel .

b. Ecrire f'' en fonction de f .

c. Représenter la fonction f .



2. Reprendre les questions précédentes pour la fonction
$g : \longmapsto \sqrt{3}\sin(2x) - \cos(2x)$.

2. Théorème Page196

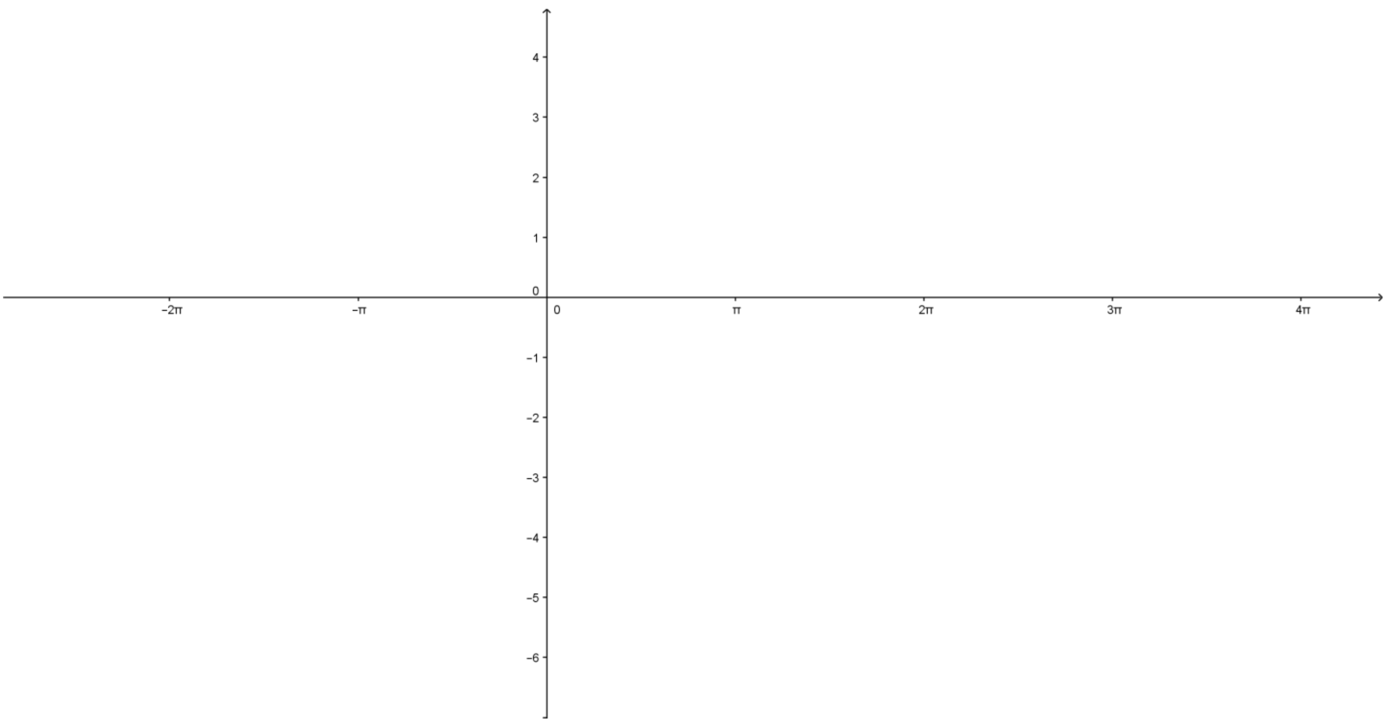
Soit un réel $\omega > 0$

Les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

3. Activité

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y'' + 9y = 0$,telle que $f(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $et\ \ f'(0) = \frac{3}{2}$.

2. Représenter$f$.



4. **Théorème Page 195**

   Soit ω un réel non nul et x_0 , y_0 deux réels . L'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = x_0$ et $f'(0) = y_0$.

   C'est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $(x) = \frac{y_0}{\omega}\, sin(\omega x) + \ x_0\, cos(\omega x)$.

5. **Conséquence Page 196**

   Soit ω un réel non nul .

   La fonction nulle est l'unique solution de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ qui vérifie $y(0) = y'(0) = 0$.

6. **Activité 5 Page 196**

   1. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y = 0$, telle que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \ \ et \ \ f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$

   2. Représenter$f$.
   3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations$f(x) = 1$, $f(x) = -1$.

7. **Exercice 12 Page 202**