Direction régionale de l'éducation Tunis 1	Devoir de Contrôle n° : 4 Mathématiques	Année scolaire 2017/2018
Lycée : El Montazeh El Mourouj 2	Durée : 2H	Classe : 4 ème Sc-Exp 2
Mr : Gary Badreddine	Date : 18/04/2018	Coefficient :3

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4, L'annexe est à rendre avec la copie.

NB : il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation

Exercice n°: 1 (6 pts)

Pour dater les ossements d'animaux préhistoriques , on utilise couramment la méthode dite du « cabone14».On admet que tant que l'animal est vivant, la quantité de carbone 14 dans son organisme est constante et qu'elle est égale à 100.Après la mort de l'animal, la quantité de carbone 14 s'amenuise progressivement.

On donne le tableau suivant :

Quantité restante de carbone 14 : q_i	48	30	23	16	11
$x_i = ln(q_i)$					
Age des ossements (en milliers d'années) : y_i	6	10	12	15	18

1. **R**ecopier et Compléter le tableau ci-dessus en prenant pour x_i des valeurs approchées à 0,01 près par défaut.
2. **R**eprésenter cette série dans un repère orthogonal.(unités :0,5cm sur l'axe des abscisses : 2 cm sur l'axe des ordonnées) .
3. **a.** **C**alculer les coordonnées du point moyen G .

   b. **C**alculer le coefficient de corrélation linéaire de cette série .Que peut –on conclure ?
4. **a.** **D**éterminer une équation de la droite de régression de y en , par la méthode de moindres carrés .(Donner les coefficients à 10^{-3} prés par défaut).

   b. **T**racer cette droite dans le repère précédent.
5. **O**n a mis à jour des ossements dont la teneur en carbone 14 est 40. Estimer à 500 ans près l'âge de ces ossements.

Exercice n°: 2 (9 pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x+3}$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

1. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. Démontrer que la droite (D_1) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ en $-\infty$.

c. Étudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (D_1).

2. a. On note f' la fonction dérivée de . Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout réel , on a : $f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3}\right)^2$.

b. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.

3. a. Que peut-on dire de la tangente (D_2) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point I d'abscisse $\ln(3)$?

b. En utilisant les variations de la fonction f, étudier la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à (D_2).

4. a. Montrer que la tangente (D_3) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = \frac{1}{4}x + 1$.

b. Étudier la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la tangente (D_3)sur l'intervalle $]-\infty; \ln(3)]$. On pourra utiliser la dérivée seconde de f notée f'' définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par : $f''(x) = \frac{12e^x(e^x-3)}{(e^x+3)^3}$.

5. On admet que le point I est centre de symétrie de la courbe $(\mathcal{C})$. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$, les tangentes (D_2), (D_3) et les asymptotes à la courbe $(\mathcal{C})$ .On rappelle que l'unité graphique choisie est 2 cm **(voir Annexe 1)** .

6. a. Déterminer une primitive de la fonction g définie sur par $\mathbb{R}$: $g(x) = \frac{e^x}{e^x+3}$.

b. Soit λ un réel strictement négatif.
On note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par (D_1), $(\mathcal{C})$ et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 0$.
Montrer que : $\mathcal{A}(\lambda) = 4\ln(4) - 4\ln(e^\lambda + 3)$).

c. Calculer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

Exercice n°: 3 (5 pts)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\, dx$.

1. **a.** Justifier l'existence de (I_n) .
   b. Calculer I_1 .
2. Démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^* : I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$. Calculer I_2 et I_3.
3. Utiliser les résultats précédents pour calculer $I = \int_0^1 (-x^3 + 2x^2 - x)\, e^{-x} dx$.
4. **a.** Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante .
   b. Montrer que : $n \in \mathbb{N}^*$ $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
   c. En déduire que (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

Nom : **Prénom :**

(voir Annexe 1)