Direction régionale de l'éducation *Tunis 1*	***Devoir de Contrôle n° 4:*** **Mathématique**	**Année scolaire** **2016/2017**
Lycée : **El Montazeh Mourouj 2**	**Durée : 2H**	**Classe : 4ème Math**
Mr : Gary Badreddine	**Date : 02/05/2017**	**Coefficient : 4**

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3. La page 3/3 à rendre avec les copies.

Exercice 1 : (5 pts)

Soit F la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $F(x) = \int_x^{8x} f(t)\,dt$ avec $f(t) = \sqrt[3]{t}\,e^{-t}$.

1. **a**. Montrer que F est dérivable sur $[\,0\,,+\infty\,[$.
   b. Monter que pour tout $\in [\,0\,,+\infty[\,,\, F'(x) = \sqrt[3]{x}\,e^{-x}\,(\,16e^{-7x} - 1\,)$.
   c. Déduire le sens de variation de .
2. **a.** Monter que pour tout $\in [\,0\,,+\infty[$, on a $0 \leq F(x) \leq 2f(x)\,(\,1 - e - 7x\,)$.
   b. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

Exercice 2: (6 pts)

I. Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x - x\ln x$.

1. Déterminer les limites de la fonction g à droite en 0 et en $+\infty$.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

II. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in IN^*$ par $u_n = \dfrac{e^n}{n^n}$.

Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in IN^*$ par $v_n = \ln\left(u_n\right)$.

1. Montrer que $v_n = n - n\ln(n)$.
2. En utilisant la Partie (**I**), déterminer le sens de variation de la suite (v_n)
3. En déduire le sens de variation de la suite (u_n)
4. Montrer que la suite (u_n) est bornée.
5. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite

Exercice 3 : (5 pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $R(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère dans C l'équation (E) : $z^2 + (2\sin\theta + 3i\cos\theta - 2)\,z - 2\,(2\sin\theta + 3i\cos\theta) = 0$ où $\theta \in IR$.

1. Vérifier que 2 est une solution de (E) puis déterminer l'autre solution .

On note M_1 et M_2 les images respectives de $z_1 = 2$ et $z_2 = -2\sin\theta - 3i\cos\theta$.

2. On considère l'ellipse (E) de centre O , de foyer $(0, \sqrt{5})$ et dont l'un des sommets est M_1 .

a. Montrer qu'une équation de (E) est : $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

b. Vérifier que M_1 et M_2 appartiennent à (E) .

3. Soit **A** l'aire de l'ellipse (E) . Montrer que **A** $= 6\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\,dx$.

4. Soit F la fonction définie sur $I = [\,0\,, \frac{\pi}{2}]$ par : $F(x) = \int_0^{2\sin x} \sqrt{4 - t^2}\,dt$.

a. Démontrer que F est dérivable sur $[\,0\,, \frac{\pi}{2}]$ et que $F'(x) = 4\cos^2 x$.

b. En déduire que **A** $= 6\pi$.

Exercice 4 : (4 pts)

Le glacier d'Aletsch, classé à l'UNESCO, est le plus grand glacier des Alpes ; situé dans le sud de la Suisse, il alimente la vallée du Rhône.

Pour étudier le recul de ce glacier au fil des années, une première mesure a été effectuée en 1900 : ce glacier mesurait alors 25,6 km.

Des relevés ont ensuite été effectués tous les 20 ans : le recul du glacier est mesuré par rapport à la position où se trouvait initialement le pied du glacier en 1900. Les mesures successives ont été relevées dans le tableau ci-dessous. On note t la durée, en années, écoulée depuis 1900, et r le recul correspondant, mesuré en kilomètres.

Année de mesure :	1900	1920	1940	1960	1980	2000
Durée t écoulée (depuis 1900) :	0	20	40	60	80	100
Recul r (en km) :	0	0,3	0,6	1	1,6	2,3

Par exemple, en 1940 ($t = 40$), le recul du glacier par rapport à 1900 a été de 0,6 km : la longueur du glacier était donc de $25,6 – 0,6 = 25$ km.

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-3} près.

Partie A Étude d'un modèle affine

1. Tracer le nuage de points (durée t en abscisse, distance r en ordonnée).

2. À l'aide de la calculatrice, donner l'équation de la droite d'ajustement affine par la méthode des moindres carrés de r en fonction de t, puis tracer cette droite dans le repère précédent.

3. À partir du modèle affine obtenu précédemment, estimer par le calcul :

a. Le recul puis la longueur du glacier en 2012.

b. L'année de disparition du glacier (arrondir à l'unité).

Partie B Utilisation d'un modèle exponentiel

Le résultat du 3. b. de la partie A étant peu en accord avec la plupart des autres études, les glaciologues considèrent un autre modèle : le modèle exponentiel.

On pose $y = \ln(r)$*. On rappelle que ln(r) désigne le logarithme népérien du recul r.*

1. Recopier puis compléter le tableau suivant sur votre copie (pour permettre le calcul de y, la durée 0 de l'année 1900 a été exclue du tableau.

Durée t (à partir de 1900)	20	40	60	80	100
$y=\ln(r)$					

2. a. À l'aide de la calculatrice, donner l'équation de la droite d'ajustement affine par la méthode des moindres carrés de y en fonction de t.

b. En déduire que r en fonction de t.

3. En utilisant le modèle obtenu précédemment, estimer par le calcul :

a. Le recul puis la longueur du glacier en 2012.

b. L'année de disparition du glacier (arrondir à l'unité).