Direction régionale de l'éducation Tunis 1	Devoir de Synthèse n° : 2 Mathématique	Année scolaire 2016/2017
Lycée : **El Montazeh Mourouj 2**	**Durée : 4 H**	**Classe : 4ème Math**
Mr : Gary Badreddine	**Date : 11/05/2017**	**Coefficient : 4**

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3.

Exercice 1 : (4 pts)

L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct (O , $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$) .
On donne les points $A(0 , 4 , 1)$; B(-2 , 4 , 5) et C (1 , 1 , 5) .

1. **D**émontrer que les points A, B et C déterminent un plan **P** qu'on déterminera une équation cartésienne.

2. **a)** **M**ontrer que l'ensemble Δ des points M de $\mathcal{E}$ tel que la sphère de diamètre [BM] passe par les points A et C est une droite.

b) **V**érifier que le point D (0 , 0 , 1) $\in \Delta$.

c) **D**onner une équation de la sphère S de diamètre [BD].

3. **S**oit **h** l'homothétie de centre D et de rapport **k**. (**k** $\in \mathbb{R}^*$).

4. **D**éterminer S' limage de S par **h**.

5. **D**éterminer **k** pour que S' soit tangente à P.

Exercice 2 : (4 pts)

On désigne par **A** l'ensemble des entiers naturels inferieures ou égales à 2010.

1. **a)** **E**n utilisant le fait que 2011 est un nombre premier, montrer que l'équation (E): $67x + 2011y = 1$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

a) **V**érifier que le couple (-30,1) est une solution particulière de (E).

b) **R**ésoudre (E).

c) **D**éduire la valeur de l'entier naturel x inférieur ou égal à 2010 vérifiant $67x \equiv 1[2011]$.

2. **a)** **S**oit a un entier, montrer $a^2 \equiv 1[2011]$ si et seulement si $a \equiv 1[2011]$ ou $\equiv -1[2011]$.

b) **E**n déduire que 1 et 2010 sont les seuls entiers de **A** qui sont égaux à leurs inverses.

3. **M**ontrer alors que $2010! \equiv 2010\ [2011]$.

Exercice 3 : (8 pts)

Une usine produit, grâce à des machines, **A**, **B** et **C** qui produisent le même type de pièce. Elles produisent respectivement **20%**, **30%** et **50%** de la production totale. Par ailleurs, on constate que le pourcentage de pièces défectueuses est **5%** pour **A**, **3%** pour **B** et **2%** pour **C**.

Lors d'un tirage d'une pièce dans la production totale on notera les événements :

A : « La pièce provient de la machine **A** », **B** : « La pièce provient de la machine **B** »,

C : « La pièce provient de la machine **C** », **D** : « La pièce tirée est défectueuse ».

1. **T**raduire les données de l'énoncé en termes de probabilités.

2. **O**n prélève au hasard une pièce dans la production totale. Calculer la probabilité qu'elle soit défectueuse.

3. **O**n considère une pièce défectueuse. Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine **C**.

4. **À** la sortie de la machine **A**, on prélève un échantillon de **10 pièces**. Calculer la probabilité

   qu'il y ait au maximum une seule pièce défectueuse.

5. **U**ne machine **M** fabrique un objet assemblant une pièce provenant de **A** , une pièce provenant de **B** et une Pièce provenant de **C** .Elle prend au hasard des pièces dans trois stocks comprenant un grand nombre de pièces .Les différentes pièces sont tirés au hasard et indépendamment les unes des autres

   a) **O**n suppose qu'un objet fabriqué par **M** a la probabilité :

   0,048 d'avoir seulement le défaut **a** ;

   0,028 d'avoir seulement le défaut **b** ;

   0,018 d'avoir seulement le défaut **c** .

   On désigne par **X** la variable aléatoire qui à tout échantillon des **10 objets** pris au hasard et avec remise, à la sortie de la machine **M**, associe le nombre d'objets de cet échantillon présentant seulement le défaut **a** .Quelle est la loi suivie par **X** ? préciser les paramètre

   b) **C**alculer à 10^{-3} près la probabilité que dans un tel échantillon, deux objets exactement présentent le seul défaut **a**.

6. **L**a machine M convenablement réglée rejette toutes les pièces présentant le défaut **a** ou le défaut **b.** Seuls continuent à sortir ceux ne présentant que le défaut **c** .

   La probabilité qu'un objet présente alors le seul défaut **c** est **0,018**.

   On désigne par **Y** la variable aléatoire qui, à tout échantillon de **1000 objets** pris au hasard à la sortie

   machine **M** , associe le nombre d'objets présentant le défaut **c** .

   La production étant importante, tout échantillon de **1000 objets** est assimilé à un échantillon prélevé

   avec remise.

   a) **Q**uelle est la loi suivie par **Y** ? Déterminer les paramètres

   b) **C**alculer à 10^{-3} près la probabilité que dans un tel échantillon, deux objets au plus présentent le seul défaut **c** .

Exercice 4 : (4pts)

On considère les suites (I_n) et (J_n) définies pour tout entier naturel *n* par : $I_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x} dx$ et

$J_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2} dx$.

1. **L**es fonctions f_n définies sur l'intervalle [0 ; 1] par $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+x}$ pour différentes valeurs de n Sont représentées ci-dessous.

a) **F**ormuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en expliquant la démarche.

b) **D**émontrer cette conjecture.

2. **a)** **M**ontrer que pour tout entier n > 0 et pour tout nombre réel x de l'intervalle [0 ; 1] :

$$0 \leq \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2} \leq \frac{e^{-nx}}{1+x}.$$

b) **M**ontrer que la suite (I_n) converge vers 0 puis conclure pour (J_n) .

3. **a)** **M**ontrer, en effectuant une intégration par parties, que pour tout entier n >1 :

$$I_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{e^{-n}}{2} - J_n\right)$$

b) **E**n déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} nI_n$.