REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION	SESSION DE CONTROLE	EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION DE JUIN 2009
SECTION :	SCIENCES DE L'INFORMATIQUE	
ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES	DURÉE : 3 heures	COEFFICIENT : 3

Exercice 1 (4 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(-2, -1, 3)$, $B(1, -1, 4)$ et $C(3, 0, 1)$ et la droite Δ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 3 - 2\alpha \\ y = -\alpha \\ z = 1 + 3\alpha \end{cases}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que les points A, B et C définissent un plan qu'on notera P.
2) Répondre par vrai ou faux en justifiant à chaque fois la réponse .
   a) Le point A appartient à la droite Δ.
   b) $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur directeur de Δ.
   c) La droite Δ est parallèle au plan P.
   d) Les droites Δ et (AB) sont orthogonales.

Exercice 2 (4 points)

A tout nombre complexe z non nul, on associe le nombre complexe $u = \dfrac{z - i}{z}$.

1) Calculer u sachant que $z = 1 - i$.
2) Calculer z sachant que $u = 2i$.
3) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $|u| = 1$.
4) Déterminer les nombres complexes z vérifiant : $\dfrac{z - i}{z} = -iz$.

Exercice 3 (4 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2$.

1) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 3$.
   b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante ; en déduire qu'elle est convergente.
   c) Déterminer alors la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
2) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \ln(u_n - 3)$. (ln désigne la fonction logarithme népérien).
   a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = -\ln 3$.
   b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
   c) Retrouver alors la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 4 (5 points)

Soit f une fonction définie et dérivable sur IR dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

On note par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On suppose que la courbe $(\mathscr{C})$ passe par l'origine du repère et que $f'(0) = 2e$ (e est le nombre réel tel que $\ln(e) = 1$)

1) Donner sans justification :
   a) Un extremum de f.
   b) Une équation cartésienne d'une asymptote à $(\mathscr{C})$.
   c) Une équation cartésienne de la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.
2) On suppose dans la suite que $f(x) = 2x\,e^{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$.
   a) Montrer que $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique au voisinage de $-\infty$ et donner sa direction.
   b) Montrer que le point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse 2 est un point d'inflexion.
   c) Construire $(\mathscr{C})$.
   d) A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $I = \int_0^1 xe^{1-x}\,dx$.

      En déduire l'aire de la partie du plan limitée par $(\mathscr{C})$, les axes du repère et la droite d'équation $x = 1$.

Exercice 5 (3 points)

1) On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $4x + 5y = 7$.
   a) Vérifier que $(-2, 3)$ est une solution de (E).
   b) Résoudre l'équation (E).

2) Dans l'espace muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les plans P et Q d'équations respectives : $x + 6y - z - 8 = 0$ et $3x - y + z + 1 = 0$.
   a) Montrer que P et Q sont sécants suivant une droite D.
   b) Déterminer l'ensemble $\mathscr{F}$ des points de D dont les coordonnées sont des entiers.

Exercice 1 :

A(-2 , -1 , 3) ; B(1, -1 , 4) et C(3 , 0 , 1)

1- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5\\1\\-2\end{pmatrix}$, det($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$) $\neq \vec{0}$ signifie que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires signifie A , B et C non alignés signifie A , B et C définissent un plan .P .

2- a) $\begin{cases} x = 3 - 2\alpha = -2 \text{ signifie } \alpha = 5/2 \\ y = -\alpha = -1 \text{ signifie } \alpha = 1 \\ z = 1 + 3\alpha \end{cases}$ $5/2 \neq 1$ donc A $\notin \Delta$. **Faux**

b) $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix} = -\vec{u}$ avec $\vec{u}$ un vecteur directeur de Δ . **Vrai**

c) $\vec{n} = \begin{pmatrix}-1\\11\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de P , $\vec{n}\cdot\vec{u}$ = 2 - 11 + 9 = 0 signifie $\vec{n} \perp \vec{u}$ signifie P est parallèle à Δ . **Vrai**

d) $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}$ = -6 + 3 = -3 $\neq$ 0 signifie Δ et (AB) ne sont pas orthogonaux . **Faux**

Exercice 2 :

Pour tout nombre complexe non nul z on associe $u = \dfrac{z - i}{z}$.

1- $u = \dfrac{1 - i - i}{1 - i} = \dfrac{1 - 2i}{1 - i} = \dfrac{(1 - 2i)(1 + i)}{2} = \dfrac{3 - i}{2} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}i$.

2- $2i = \dfrac{z - i}{z}$ signifie 2iz = z - i signifie (-1 + 2i)z = - i signifie $z = \dfrac{i}{1-2i}$

$= \dfrac{i(1 + 2i)}{5} = \dfrac{-2 + i}{5} = -\dfrac{2}{5} + i\dfrac{1}{5}$.

3- $|u| = 1$ signifie $|z - i| = |z|$, on désigne par A le point d'affixe i et O le point d'affixe 0

D'où AM = OM donc M $\in$ med$[$ OA $]$.

4- $\dfrac{z - i}{z} = -iz$ signifie $iz^2 + z - i = 0$, $\Delta = 1 - 4 = -3 = 3i^2 = \left(i\sqrt{3}\right)^2$

$z_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2i} = \dfrac{\sqrt{3} + i}{2}$; $z_2 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2i} = \dfrac{-\sqrt{3} + i}{2}$.

Exercice 3 :

$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}, \text{ pour tout } n \in IN .$$

1- a) Vérifions pour le premier terme , $u_0 = 6 > 3$; (vérifiée)

Supposons qu'à l'ordre n , ($u_n > 3$)

Démontrons qu'à l'ordre n+1 ; ($u_{n+1} > 3$)

On a : $u_n > 3$ alors $\frac{1}{3}u_n \succ \frac{1}{3}\times 3$ alors $\frac{1}{3}u_n + 2 \succ \frac{1}{3}\times 3 + 2 = 3$ alors $u_{n+1} > 3$.

Conclusion : Pour tout $n \in IN$, $u_n > 3$.

b) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + 2 - u_n - \frac{2}{3}u_n + 2 = -\frac{2}{3}(u_n - 3) \prec 0$ car $u_n - 3 > 0$.

Conclusion : (u_n) est une suite décroissante .

(u_n) est une suite décroissante, minorée par 3 alors (u_n) est une suite convergente .

c) Soit la fonction f définie sur $I = [3,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$.

On a : $\begin{cases} f \text{ est continue sur } I \\ u_{n+1} = f(u_n) \\ \text{Pour tout } n \in IN, u_n \in I \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \text{ , } \ell \in I . \end{cases}$ alors $f(\ell) = \ell$.

$f(\ell) = \ell$ signifie $\frac{1}{3}\ell + 2 = \ell$ signifie $\frac{2}{3}\ell = 2$ signifie $\ell = 3$.

2- Pour tout $n \in IN$, $v_n = \ln(u_n - 3)$.

a) $v_{n+1} - v_n = \ln(u_{n+1} - 3) - \ln(u_n - 3) = \ln\left(\frac{(1/3)u_n + 2 - 3}{u_n - 3}\right) =$

$\ln\left(\frac{(1/3)u_n - 1}{3((1/3)u_n - 1)}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln 3$.

Conclusion : (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = -\ln 3$.

Pour tout $n \in IN$, $v_n = v_0 + nr$ or $v_0 = \ln(u_0 - 3) = \ln 3$

$v_n = \ln 3 - n\ln 3 = \ln 3 - \ln(3^n) = \ln\left(\frac{3}{3^n}\right) = \ln\left(\frac{1}{3^{n-1}}\right) = \underline{\mathbf{-\ln(3^{n-1})}}$.

Pour tout $n \in IN$, $u_n - 3 = e^{v_n}$ signifie $u_n = e^{v_n} + 3 = \underline{\mathbf{\frac{1}{3^{n-1}} + 3}}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

Exercice 4 :

Soit la fonction f définie et dérivable sur IR dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f '(x)	+	0	-
f(x)	$-\infty$ ↗	2	↘ 0

1- a) f admet un extrémum en $x_0 = 1$, égale à 2 .

b) $\Delta : y = 0$ est une asymptote horizontale à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.

c) $T : y = f'(0)(x-0) + f(0) = 2ex + f(0) = 2e\,x$.

2- Pour tout $x \in IR$, $f(x) = 2x\,e^{1-x}$.

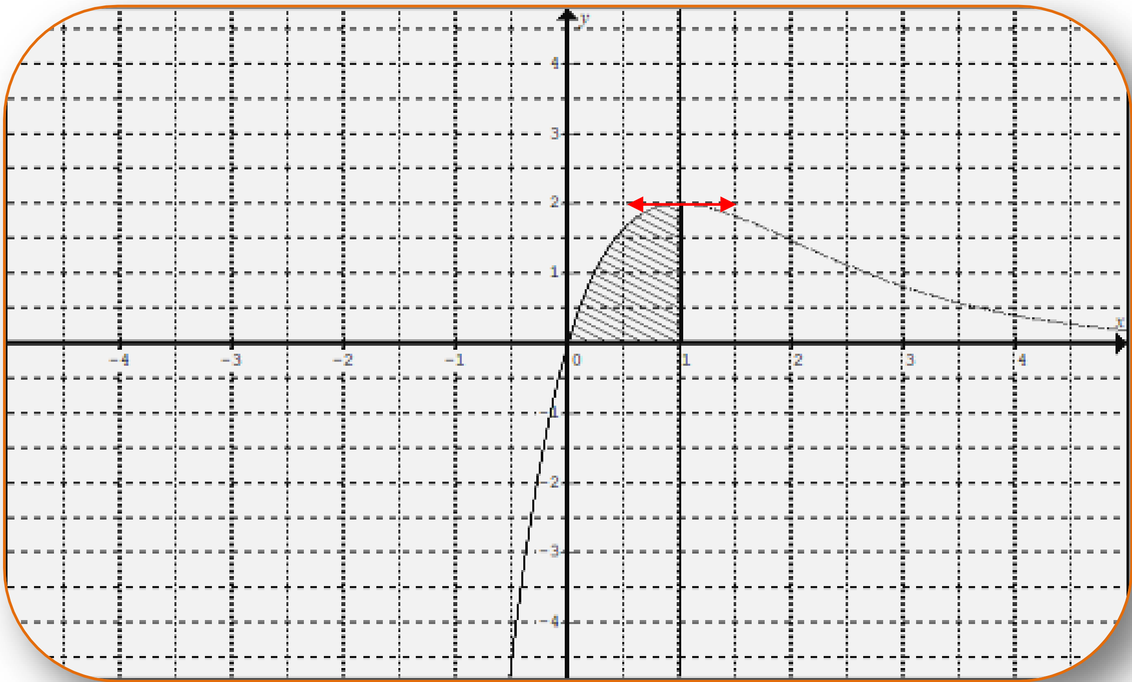
a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2xe^{1-x}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 2e^{1-x} = +\infty$ donc $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction (oy) au voisinage de $-\infty$.

b) f est deux fois dérivable dur IR , $f'(x) = 2e^{1-x} - 2x\,e^{1-x} = 2e^{1-x}(1-x)$.

$f''(x) = 2e^{1-x}(x-2)$, la dérivée seconde de f s'annule en 2 en changeant de signe .

<u>Conclusion : le point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse 2 est un point d'inflexion .</u>

c) traçage de $(\mathscr{C})$.



d) $I = \int_0^1 xe^{1-x}\,dx$. On pose $u = x$ alors $u' = 1$ et $v' = e^{1-x}$ alors $v = -e^{1-x}$

$$I = \left[-x e^{1-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{1-x}\,dx = -1 - \left[e^{1-x}\right]_0^1 = e - 2 .$$

$$\mathscr{A} = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 2xe^{1-x}\,dx = 2\int_0^1 xe^{1-x}\,dx = 2I = (2e - 4)\ \textbf{u.a} .$$

Exercice 5 :

1- On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation (E) : $4x + 5y = 7$

a) $4(-2) + 5(3) = -8 + 15 = 7$ signifie $(-2, 3)$ est une solution de (E) .

b) $4x + 5y = 4(-2) + 5(3)$ signifie $4(x + 2) = 5(3 - y)$

5 divise $4(x + 2)$ et $5 \wedge 4 = 1$ alors 5 divise $x + 2$ alors $x = 5k - 2$; $k \in \mathbb{Z}$.

$4(5k - 2 + 2) = 5(3 - y)$ alors $4k = 3 - y$ alors $y = 3 - 4k$.

$S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \{(-2 + 5k ; 3 - 4k), k \in \mathbb{Z}\}$.

2- a) $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\6\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de P, $\vec{n}'\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de Q .

$\vec{n}\begin{pmatrix}1\\6\\-1\end{pmatrix} \wedge \vec{n}'\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-4\\-19\end{pmatrix} \neq \vec{0}$ signifie que P et Q deux plans non parallèles signifie

$P \cap Q = \mathscr{D}$

b) $\mathscr{D} : \begin{cases} x + 6y - z - 8 = 0 \\ 3x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$

$M(x, y, z) \in \mathscr{D}$ signifie $z = x + 6y - 8 = -3x + y - 1$ signifie $4x + 5y = 7$ donc

$x = 5k - 2$; $k \in \mathbb{Z}$, $y = 3 - 4k$ et $z = 5k - 2 + 18 - 24k - 8 = -19k + 10$

$F = \{ (5k - 2, 3 - 4k, -19k + 10), k \in \mathbb{Z} \}$.