Série corrigée : Probabilité

Exercice 1 :

Deux éleveurs produisent une race de poissons d'ornement qui ne prennent leur couleur définitive qu'à l'âge de trois mois :

- pour les alevins du premier élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 10 % n'ont pas survécu, 75 % deviennent rouges et les 15 % restant deviennent gris ;

- pour les alevins du deuxième élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 5 % n'ont pas survécu, 65 % deviennent rouges et les 30 % restant deviennent gris.

Une animalerie achète les alevins à l'âge de deux mois : 60 % au premier éleveur, 40 % au second.

1. Un enfant achète un poisson le lendemain de son arrivée à l'animalerie, c'est-à-dire à l'âge de deux mois.

a. Montrer que la probabilité que le poisson soit toujours vivant un mois plus tard est de 0,92.

b. Déterminer la probabilité qu'un mois plus tard le poisson soit rouge.

c. Sachant que le poisson est gris à l'âge de trois mois, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier élevage ?

2. Une personne choisit au hasard et de façon indépendante 5 alevins de deux mois. Quelle est la probabilité qu'un mois plus tard, seulement trois soient en vie ? On donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

3. L'animalerie décide de garder les alevins jusqu'à l'âge de trois mois, afin qu'ils soient vendus avec leur couleur définitive. Elle gagne 1 euro si le poisson est rouge, 0,25 euro s'il est gris et perd 0,10 euro s'il ne survit pas.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique de l'animalerie par poisson acheté.

Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique, arrondie au centime.

Correction

1. a. Pour que le poisson soit toujours vivant il faut qu'il soit encore vivant sachant qu'il provient du 1er élevage ou qu'il soit vivant sachant qu'il provient du 2ème élevage : avec un arbre on a alors

$p(V)=p_{E_1}(V)p(E_1)+p_{E_2}(V)p(E_2)=0,9\times 0,6+0,95\times 0,4=0,92$.

b. Même type de calcul : $p(R)=p_{E_1}(R)p(E_1)+p_{E_2}(R)p(E_2)=0,75\times 0,6+0,65\times 0,4=0,71$.

c. $p(G)=p_{E_1}(G)p(E_1)+p_{E_2}(G)p(E_2)=0,15\times 0,6+0,30\times 0,4=0,21$;

$$p_G(E_1)=\frac{p(E_1\cap G)}{p(G)}=\frac{p_{E_1}(G)p(E_1)}{p(G)}=\frac{0,15\times 0,6}{0,21}\approx 0,43.$$

On remarquera qu'un poisson peut mourir, devenir Rouge ou devenir Gris : 0,08+0,71+0,21 = 1.

2. Schéma de Bernoulli/Loi binomiale : $n=5$, $p=0,92$, $k=3$; $P(k=3)=\binom{5}{3}0,92^3 0,08^2\approx 0,05$.

3. $p(X=1)=0,71$, $p(X=0,25)=0,21$, $p(X=-0,1)=0,08$.

$\mathrm{E}(X)=0,71\times 1+0,25\times 0,21-0,1\times 0,08=0,75$.

Exercice 2 :

On dispose d'un dé cubique équilibré dont une face porte le numéro 1, deux faces portent le numéro 2 et trois faces portent le numéro 3.

On dispose également d'une urne contenant dix boules indiscernables au toucher, portant les lettres L, O, G, A, R, I, T, H, M, E (soit quatre voyelles et six consonnes).

Un joueur fait une partie en deux étapes :

Première étape : il jette le dé et note le numéro obtenu.

Deuxième étape :

• si le dé indique 1, il tire au hasard une boule de l'urne. Il gagne la partie si cette boule porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

• si le dé indique 2, il tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces deux boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

• si le dé indique 3, il tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces trois boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

À la fin de chaque partie, il remet dans l'urne la ou les boules tirée(s).

On définit les évènements suivants :

D_1 : « le dé indique 1 », D_2 : « le dé indique 2 »,

D_3 : « le dé indique 3 », G : « la partie est gagnée ».

A et B étant deux évènements tels que $p(A)\neq 0$, on note $p_A(B)$ la probabilité de B sachant que A est réalisé.

1. a. Déterminer les probabilités $p_{D_1}(G)$, $p_{D_2}(G)$ et $p_{D_3}(G)$.

b. Montrer alors que $p(G)=\frac{23}{180}$.

2. Un joueur a gagné la partie. Calculer la probabilité qu'il ait obtenu le numéro 1 avec le dé.

3. Un joueur fait six parties. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur arrondie à 10^{-2} près.

Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,9 ?

Correction

1. a. $p_{D_1}(G)$: s'il tire un 1, il gagne s'il tire une voyelle, soit 4 chances sur 10, $p_{D_1}(G)=\frac{4}{10}$.

$p_{D_2}(G)$: s'il tire un 2, il gagne s'il tire 2 voyelles, soit $\binom{4}{2}=\frac{4.3}{2}=6$ chances sur $\binom{10}{2}=\frac{10.9}{2}=45$, $p_{D_2}(G)=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$;

$p_{D_3}(G)$: s'il tire un 3, il gagne s'il tire 3 voyelles, soit $\binom{4}{3}=\frac{4.3.2}{3.2}=4$ chances sur $\binom{10}{3}=\frac{10.9.8}{3.2}=120$,

$p_{D_3}(G)=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$.

b. On applique les probabilités totales :

$$p(G)=p\left(D_1\cap G\right)+p\left(D_2\cap G\right)+p\left(D_3\cap G\right)$$

$$=p_{D_1}(G).p(D_1)+p_{D_2}(G).p(D_2)+p_{D_3}(G).p(D_3)=\frac{4}{10}.\frac{1}{6}+\frac{2}{15}.\frac{2}{6}+\frac{1}{30}.\frac{3}{6}=\frac{23}{180}.$$

2. Ce coup-ci on cherche $p_G(D_1)=\frac{p(G\cap D_1)}{p(G)}=\frac{p_{D_1}(G).p(D_1)}{p(G)}=\frac{\frac{4}{10}.\frac{1}{6}}{\frac{23}{180}}=\frac{180}{23}.\frac{4}{60}=\frac{12}{23}$.

3. Un joueur fait six parties : loi binomiale avec *n* = 6 et $p=\frac{23}{180}$. On cherche

$$p(k=2)=\binom{6}{2}\left(\frac{23}{180}\right)^2\left(1-\frac{23}{180}\right)^4\approx 0,14.$$

On remplace 6 par *n* et *k* par 0 : $p(k\geq 1)=1-p(k=0)=1-\binom{n}{0}\left(\frac{23}{180}\right)^0\left(1-\frac{23}{180}\right)^n=1-\left(\frac{157}{180}\right)^n$; il faut donc résoudre

$1-\left(\frac{157}{180}\right)^n\geq 0,9\Leftrightarrow\left(\frac{157}{180}\right)^n\leq 0,1\Leftrightarrow n\geq\frac{\ln(0,1)}{\ln(157/180)}\approx 16,8$ soit 17 parties minimum.

Exercice 3 :

Une maladie atteint 3% d'une population donnée. Un test de dépistage donne les résultats suivants :

Chez les individus malades, 95% des tests sont positifs et 5% négatifs.

Chez les individus non malades, 1% des tests sont positifs et 99% négatifs.

On choisit un individu au hasard.

1. Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.

2. Quelle est la probabilité

a. qu'il soit malade et qu'il ait un test positif ?

b. qu'il ne soit pas malade et qu'il ait un test négatif ?

c. qu'il ait un test positif ?

d. qu'il ait un test négatif ?

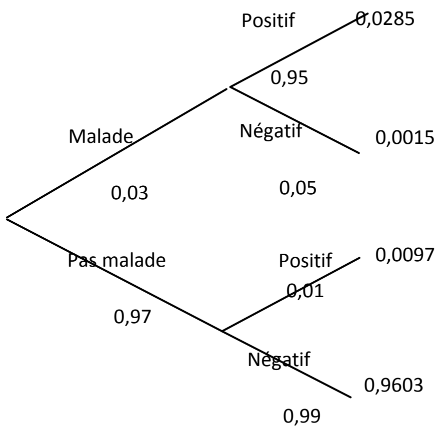
3. Calculer la probabilité

a. qu'il ne soit pas malade, sachant que le test est positif ?

b. qu'il soit malade, sachant que le test est négatif ?

4. Interpréter les résultats obtenus aux questions 3. a. et 3. b.

Correction



1. Voir ci-contre.
2. On note *M* l'individu est malade et *T* le test est positif :

a. $P(M\cap T)=P(M)\times P_M(T)=0,03\times 0,95=0,0285$.

b. $P(\bar{M}\cap\bar{T})=P(\overline{M})\times P_{\overline{M}}(\overline{T})=0,97\times 0,99=0,9603$.

c. $P(T)=P(\bar{M}\cap T)+P(M\cap T)=0,0097+0,0285=0,0382$.

d. $P(\bar{T})=P(\bar{M}\cap\bar{T})+P(M\cap\bar{T})=0,0015+0,9603=0,9618$.

3. a. $P_T(\bar{M})=\dfrac{P(T\cap\bar{M})}{P(T)}=\dfrac{0,0097}{0,0382}\approx 0,25$: c'est énorme…

b. $P_{\bar{T}}(M)=\dfrac{P(\bar{T}\cap M)}{P(\bar{T})}=\dfrac{0,0015}{0,9618}\approx 0,00155$: ouf… on a très peu de chances d'être malade sachant que le test est négatif, c'est rassurant.

Exercice 4 :

Une usine d'horlogerie fabrique une série de montres. Au cours de la fabrication peuvent apparaître deux types de défauts, désignés par *a* et *b*. 2 % des montres fabriquées présentent le défaut *a* et 10 % le défaut *b*.

Une montre est tirée au hasard dans la production. On définit les évènements suivants :

A : « la montre tirée présente le défaut *a* » ;

B : « la montre tirée présente le défaut *b* » ;

C : « la montre tirée ne présente aucun des deux défauts » ;

D : « la montre tirée présente un et un seul des deux défauts ».

On suppose que les évènements A et B sont indépendants.

1. Montrer que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,882.
2. Calculer la probabilité de l'évènement D.
3. Au cours de la fabrication, on prélève au hasard successivement cinq montres. On considère que le nombre de montres fabriquées est assez grand pour que l'on puisse supposer que les tirages se font avec remise et sont indépendants.

Soit *X* la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de cinq montres, associe le nombre de montres ne présentant aucun des deux défauts *a* et *b*. On définit l'évènement E : « quatre montres au moins n'ont aucun défaut ».

Calculer la probabilité de l'évènement E. On en donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.

Correction

1. Comme *A* et *B* sont indépendants on a $p(A\cap B)=p(A)p(B)=0,02\times 0,1$; on en déduit donc que

$p(\text{C})=1-p(A\cup B)=1-\left[p(A)+p(B)-p(A\cap B)\right]=1-0,02-0,1+(0,02\times 0,1)=0,882$.

2. Il y a 0,02 − 0,002 = 0,018 chances de tomber sur une montre n'ayant que le défaut *a* ; de même il y a 0,1 − 0,002 = 0,098 chances de tomber sur une montre n'ayant que le défaut *b* ; on a donc

$p(D)=0,018+0,098=0,116$.

3. *X* suit une loi binomiale $B(5\,;0,882)$;

$$p(E)=p(X\geq 4)=p(X=4)+p(X=5)=\binom{5}{4}0,882^4 0,118^1+\binom{5}{5}0,882^5 0,118^0\approx 0,891.$$

Exercice 5 :

Pour entretenir en bon état de fonctionnement ses installations de chauffage, une société immobilière fait contrôler les chaudières de son parc de logements pendant l'été.
On sait que 20 % des chaudières sont sous garantie.

Parmi les chaudières sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de $\frac{1}{100}$.

Parmi les chaudières qui ne sont plus sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de $\frac{1}{10}$.

On appelle G l'événement : « la chaudière est sous garantie » ;
on appelle D l'événement : « la chaudière est défectueuse ».
1. Calculer la probabilité des évènement suivants :
A : « la chaudière est garantie et est défectueuse » ;
B : « la chaudière est défectueuse ».

2. Dans un logement la chaudière est défectueuse. Montrer que la probabilité qu'elle soit sous garantie est de $\frac{1}{41}$.

3. Le contrôle est gratuit si la chaudière est sous garantie.
Il coûte 80 dinars si la chaudière n'est plus sous garantie et n'est pas défectueuse.
Il coûte 280 dinars si la chaudière n'est plus sous garantie et est défectueuse.
On note *X* la variable aléatoire qui représente le coût du contrôle d'une chaudière. Déterminer la loi de probabilité de *X* et son espérance mathématique.
4. Au cours de la période de contrôle, on a trouvé 5 chaudières défectueuses. Quelle est la probabilité qu'au moins l'une d'entre elles soit sous garantie ?

Correction

1. Le texte donne $p(\mathrm{G})=0{,}2$, $p_{\mathrm{G}}(\mathrm{D})=0{,}01$ et $p_{\bar{\mathrm{G}}}(\mathrm{D})=0{,}1$.

$p(\mathrm{A})=p(\mathrm{G}\cap\mathrm{D})=p(\mathrm{G})\times p_{\mathrm{G}}(\mathrm{D})=0{,}2\times 0{,}01=0{,}002$;

$p(\mathrm{D})=p(\mathrm{G}\cap\mathrm{D})+p(\bar{\mathrm{G}}\cap\mathrm{D})=p(\mathrm{G})\times p_{\mathrm{G}}(\mathrm{D})+p(\bar{\mathrm{G}})\times p_{\bar{\mathrm{G}}}(\mathrm{D})=0{,}002+0{,}8\times 0{,}1=0{,}082$.

2. On cherche $p_{\mathrm{D}}(\mathrm{G})=\dfrac{p(\mathrm{D}\cap\mathrm{G})}{p(\mathrm{D})}=\dfrac{0{,}002}{0{,}082}=\dfrac{2}{82}=\dfrac{1}{41}$.

3. *X* peut prendre les valeurs 0, 80 ou 280 ;

$p(X=0)=p(\mathrm{G})=0{,}2$;

$p(X=80)=p(\bar{\mathrm{G}}\cap\bar{\mathrm{D}})=p(\bar{\mathrm{G}})p_{\bar{\mathrm{G}}}(\bar{\mathrm{D}})=0{,}8\times(1-0{,}1)=0{,}72$;

$p(X=280)=p(\bar{\mathrm{G}}\cap\mathrm{D})=p(\bar{\mathrm{G}})p_{\bar{\mathrm{G}}}(\mathrm{D})=0{,}8\times 0{,}1=0{,}08$.

$\mathrm{E}(X)=0{,}2\times 0+0{,}72\times 80+0{,}08\times 280=80$.

4. Soit *N* le nombre de chaudières sous garantie parmi les chaudières défectueuses : *N* suit une loi binomiale de paramètres $n=5$, $p=p_{\mathrm{D}}(\mathrm{G})=\frac{1}{41}$.

La probabilité cherchée est

$$p(N\geq 1)=1-p(N=0)=1-\binom{5}{0}p^0(1-p)^5=1-\left(1-\frac{1}{41}\right)^5=1-\left(\frac{40}{41}\right)^5\approx 0{,}116.$$

Exercice 6 :

On a posé à 1 000 personnes la question suivante : « Combien de fois êtes-vous arrivé en retard au travail au cours des deux derniers mois ? ». Les réponses ont été regroupées dans le tableau suivant :

Retards le 1er mois / Retards le 2ème mois	0	1	2 ou plus	Total
0	262	212	73	547
1	250	73	23	346
2 ou plus	60	33	14	107
Total	572	318	110	1000

1. On choisit au hasard un individu de cette population.
a. Déterminer la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le premier mois,

b. Déterminer la probabilité que l'individu ait eu au moins un retard le deuxième mois sachant qu'il n'en a pas eu le premier mois.

2. On souhaite faire une étude de l'évolution du nombre de retards sur un grand nombre n de mois (n entier naturel non nul). On fait les hypothèses suivantes :

– si l'individu n'a pas eu de retard le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n+1$ est 0,46.

– si l'individu a eu exactement un retard le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n+1$ est 0,66.

– si l'individu a eu deux retards ou plus le mois n, la probabilité de ne pas en avoir le mois $n+1$ est encore 0,66.

On note A_n, l'évènement « l'individu n'a eu aucun retard le mois n, B_n, l'évènement « l'individu a eu exactement un retard le mois n », C_n, l'évènement « l'individu a eu deux retards ou plus le mois n ».

Les probabilités des évènements A_n, B_n, C_n sont notées respectivement p_n, q_n et r_n.

a. Pour le premier mois (n = 1), les probabilités p_1, q_1 et r_1 sont obtenues à l'aide du tableau précédent. Déterminer les probabilités p_1, q_1 et r_1.

b. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n, q_n, et r_n. On pourra s'aider d'un arbre.

c. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -0{,}2p_n + 0{,}66$.

d. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = p_n - 0{,}55$. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.

e. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

Correction

1. a. Il y a 318 + 110 = 428 individus sur 1000, la probabilité est de 0,428.

b. Il y en a 572 qui n'ont pas eu de retard le premier mois, parmi eux 250 + 60 = 310 ont eu un retard le deuxième mois, soit une probabilité de $\frac{310}{572} \approx 0{,}542$.

2. a. A_1, = « aucun retard le mois 1 », soit une probabilité de $p_1 = 0{,}572$; B_1 = « exactement 1 retard le mois 1 » : $q_1 = 0{,}318$ et C_1 = « deux retards ou plus le mois 1 » : $r_1 = 0{,}110$.

b. On utilise les probabilités totales :

$$p_{n+1} = p(A_{n+1}) = p(A_{n+1} \cap A_n) + p(A_{n+1} \cap B_n) + p(A_{n+1} \cap C_n)$$
$$= p_{A_n}(A_{n+1})\,p(A_n) + p_{B_n}(A_{n+1})\,p(B_n) + p_{C_n}(A_{n+1})\,p(C_n) = 0{,}46p_n + 0{,}66q_n + 0{,}66r_n.$$

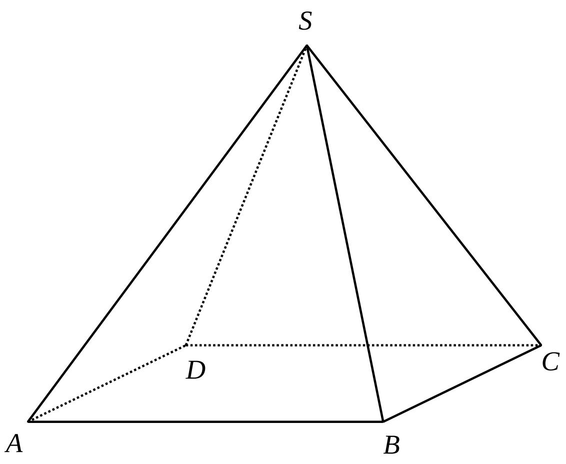
c. Mais on a $p_n + q_n + r_n = 1 \Rightarrow q_n + r_n = 1 - p_n$ donc $p_{n+1} = 0{,}46p_n + 0{,}66(1 - p_n) = -0{,}2p_n + 0{,}66$.

d. $u_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}55 = -0{,}2p_n + 0{,}66 - 0{,}55 = -0{,}2(u_n + 0{,}55) + 0{,}11 = -0{,}2u_n - 0{,}11 + 0{,}11 = -0{,}2u_n$.

(u_n) est une suite géométrique de raison −0,2.

e. Comme $|-0{,}2| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0{,}55$.

Exercice 7 :



Une fourmi se déplace sur les arêtes de la pyramide ABCDS. Depuis un sommet quelconque, elle se dirige au hasard (on suppose qu'il y a équiprobabilité) vers un sommet voisin ; on dit qu'elle « fait un pas ».

a. La fourmi se trouve en A.

Après avoir fait deux pas, quelle est la probabilité qu'elle soit :

· en A ?

· en B ?

· en C ?
· en D ?
b. Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note Sn l'évènement « la fourmi est au sommet S après n pas » et pn la probabilité de cet évènement. Donner p1.

En remarquant que $S_{n+1}=S_{n+1}\cap \overline{S_n}$, montrer que $p_{n+1}=\frac{1}{3}(1-p_n)$.

2. On considère la suite (pn), définie pour tout nombre entier n strictement positif par : $\begin{cases} p_1=\frac{1}{3} \\ p_{n+1}=\frac{1}{3}(1-p_n) \end{cases}$.

a. Montrer par récurrence que, pout tout entier naturel n strictement positif, on a $p_n=\frac{1}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$.

b. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

Correction

1. a. A un sommet comme A, B, C ou D la fourmi a $\frac{1}{3}$ d'aller sur un autre sommet ; en S elle a $\frac{1}{4}$ d'aller sur un autre sommet.

On a donc la probabilité de revenir en A : $P(\text{ABA, ADA,ASA})=2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{11}{36}$.

La probabilité d'aller en B : $P(\text{ASB})=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$.

La probabilité d'aller en C : $P(\text{ABC, ADC, ASC})=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{7}{36}$.

La probabilité d'aller en D : $P(\text{ASD})=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$.

b. $p_1=\frac{1}{3}$. $p_{n+1}=P(\text{aller en S})\times P(\text{pas en S au pas } n)=\frac{1}{3}P(\overline{S_n})=\frac{1}{3}(1-p_n)$.

2. a. $p_1=\frac{1}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^1\right)=\frac{1}{4}\times\frac{4}{3}=\frac{1}{3}$, ok.

$$p_{n+1}=\frac{1}{3}\left[1-\frac{1}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)\right]=\frac{1}{3}\left[\frac{3}{4}+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]=\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}.$$

b. Comme $\left|-\frac{1}{3}\right|<1$, le terme $\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ tend vers 0 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n=\frac{1}{4}$.

Exercice 8 :

La durée de vie d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda>0$.

Ainsi, la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant *t* est égale à $P(X\le t)=\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

1. Déterminer λ, arrondi à 10^{-1} près, pour que la probabilité $P(X > 6)$ soit égale à 0,3. Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda=0{,}2$.
2. À quel instant *t*, à un mois près, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est-elle de 0,5 ?
3. Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est $e^{-0,4}$.
4. Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est, à 10^{-2} près, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?
5. On considère un lot de 10 robots fonctionnant de manière indépendante. Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un robot qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années.

Correction

Ainsi, la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant *t* est égale à $P(X \le t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

1. $P(X>6) = 1 - P(X \le 6) = 1 - \int_0^6 \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 1 - \left[e^{-\lambda x} \right]_0^6 = e^{-\lambda 6}$; on résoud :

$e^{-6\lambda} = 0,3 \Leftrightarrow -6\lambda = \ln 0,3 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{\ln 0,3}{-6} = 0,20066213... \approx 0,2$.

2. $P(X \le t) = \int_0^t 0,2e^{-0,2x}\,dx = 1 - e^{-0,2t} = 0,5 \Leftrightarrow e^{-0,2t} = 0,5 \Leftrightarrow -0,2t = -\ln 2 \Leftrightarrow t = \dfrac{\ln 2}{0,2} = 3,47$, soit environ trois ans et demi.

3. La probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est $P(X>2) = 1 - \left(1 - e^{-0,2\times 2}\right) = e^{-0,4}$.

4. On cherche $P_{(X>2)}(X>6) = \dfrac{P\left[(X>2)\cap(X>6)\right]}{P(X>2)} = \dfrac{P(X>6)}{P(X>2)} = \dfrac{e^{-0,2\times 6}}{e^{-0,4}} = e^{0,4-1,2} = e^{-0,8} \approx 0,45$.

5. *Y* le nombre de robots sans pannes au cours des deux premières années suit une loi binomiale de paramètres *n* = 10, $p = e^{-0,4}$; on cherche donc

$P(Y \ge 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - \left(e^{-0,4}\right)^0 \left(1 - e^{-0,4}\right)^{10} \approx 0,9999$.

Exercice 9 :

Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 25 % au premier fournisseur et 75 % au second.

La proportion de composants défectueux est de 3 % chez le premier fournisseur et de 2 % chez le second.

On note :

– D l'évènement « le composant est défectueux » ;

– F_1 l'évènement « le composant provient du premier fournisseur » ;

– F_2 l'évènement « le composant provient du second fournisseur ».

1. a. Dessiner un arbre pondéré.

b. Calculer $p(D \cap F_1)$, puis démontrer que *p*(D) = 0,0225.

c. Sachant qu'un composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur ?

Dans toute la suite de l'exercice, on donnera une valeur approchée des résultats à 10^{-3} *près.*

2. Le responsable commande 20 composants. Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux soient défectueux ?

3. La durée de vie de l'un de ces composants est une variable aléatoire notée *X* qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement ou loi exponentielle de paramètre λ, avec λ réel strictement positif.

a. Sachant que *p*(*X* > 5) = 0,325, déterminer λ.

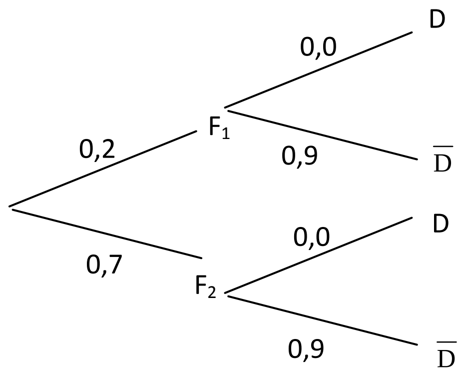
Pour les questions suivantes, on prendra λ = 0,225.

b. Quelle est la probabilité qu'un composant dure moins de 8 ans ? plus de 8 ans ?

c. Quelle est la probabilité qu'un composant dure plus de 8 ans sachant qu'il a déjà duré plus de 3 ans ?

Correction

a.



b. $p(\mathrm{D}\cap \mathrm{F}_1)=0,25\times 0,03=0,075$, de même $p(\mathrm{D}\cap \mathrm{F}_2)=0,75\times 0,02=0,015$ donc $p(\mathrm{D})=p(\mathrm{D}\cap \mathrm{F}_1)+p(\mathrm{D}\cap \mathrm{F}_2)=0,075+0,015=0,0225$.

c. $p_{\mathrm{D}}(\mathrm{F}_1)=\dfrac{p(\mathrm{D}\cap \mathrm{F}_1)}{p(\mathrm{F}_1)}=\dfrac{0,03}{0,09}=\dfrac{1}{3}$.

2. Le nombre *N* de composants défectueux suit une loi de Bernoulli de paramètres $n=20$ et $p=0,0225$; on a donc

$$p(N\geq 2)=1-p(N=1)-p(N=0)=1-\binom{20}{1}p^1(1-p)^{19}-\binom{20}{0}p^0(1-p)^{20}\approx 0,351.$$

3. a. On sait que $p(X>5)=\int_5^{+\infty}\lambda e^{-\lambda t}dt=\left[-e^{-\lambda t}\right]_5^{+\infty}=e^{-5\lambda}=0,325\Rightarrow \lambda=-\dfrac{\ln 0,325}{5}\approx 0,225$.

b. $p(X<8)=\int_0^8\lambda e^{-\lambda t}dt=\left[-e^{-\lambda t}\right]_0^8=1-e^{-8\lambda}\approx 1-0,835\approx 0,165$.

c. On a : $p_{\{X>3\}}(X>8)=\dfrac{p(X>8)}{p(X>3)}=\dfrac{e^{-8\lambda}}{e^{-3\lambda}}=e^{-5\lambda}=0,325$. La loi étant une loi exponentielle, le vieillissement n'intervient pas.

Exercice 10 :

Le bus passe toutes les quinze minutes à un arrêt précis. Un usager se présente à cet arrêt entre 7 heures et 7 heures 30. La variable aléatoire sera l'heure exacte de son arrivée à cet arrêt, uniformément répartie sur l'intervalle [0 ; 30].

1. Quelle est la probabilité que l'usager attende moins de 5 minutes le prochain bus ?
2. Quelle est la probabilité qu'il attende plus de dix minutes ?

Correction :

La variable aléatoire est le temps uniformément réparti sur 30 minutes donc $f(x) = 1/30$.

1. L'attente n'est inférieure à cinq minutes que s'il arrive entre 7 h 10 et 7 h 15 ou entre 7 h 25 et 7 h 30. On a donc $p(10\leq X\leq 15)=p(25\leq X\leq 30)=\int_{25}^{30}\dfrac{1}{30}dx=\dfrac{1}{6}$, soit la probabilité cherchée égale à $2.\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}$.

2. De même on a $p(0\leq X\leq 5)+p(15\leq X\leq 20)=\dfrac{1}{3}$.

Exercice 11 :

On suppose que la durée d'une conversation téléphonique, mesurée en minutes, est la variable exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{10}$. Vous arrivez à une cabine téléphonique et juste à ce moment précis, une personne passe devant vous.

1. Quelle est la probabilité que vous attendiez plus de dix minutes ?
2. Quelle est la probabilité que vous attendiez entre dix et vingt minutes ?

Correction :

1. L'attente est supérieure à dix minutes, on a $p(X>10)=e^{-\frac{1}{10}\times 10}=e^{-1}\approx 0,37$.

2. De même on a $p(10\leq X\leq 20)$ = $p(10\leq X\leq 20)=\int_{10}^{20}\dfrac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}}dx=e^{-1}-e^{-2}\approx 0,23$.