Direction régionale de l'éducation Tunis 1	Devoir de Synthèse n° : 2 Mathématiques	Année scolaire 2017/2018
Lycée : El Montazeh El Mourouj 2	Durée : 2H	Classe : 4 ème éco & gestion 2 & 3
Mr : Gary Badreddine & Aoiaoiti Mohamed	Date : 11/05/2018	Coefficient :2

Exercice n°: 1 (3 pts)

Pour chacune des affirmations suivantes, répondre par « VRAI » ou par « FAUX »
Aucune justification n'est demandée.

1) $e^{-2} . e^{3} = e^{-6}$

2) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln x \ dx > 0$.

3) $Ln(36) = 2(ln(2) + ln(3))$

4) La valeur moyenne de la fonction $f(x) = e^{-x}$ sur $[0 ; 1]$ est $\bar{f} = 1 - \frac{1}{e}$.

5) $\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = +\infty$

6) $\lim_{n \to +\infty} (\frac{7}{8})^n = -\infty$

Exercice n°: 1 (6 pts)

Soit U la suite définie sur ℕ par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) **a)** Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n > 1$.
b) Montrer que la suite U est décroissante.
c) En déduire que la suite U est convergente puis calculer sa limite.

2) On considère la suite V définie sur ℕ par $v_n = 3 + \frac{1}{u_n - 1}$

a) Montrer que V est une suite arithmétique de raison $r = 1$.
b) Exprimer v_n en fonction de n.
c) En déduire que $u_n = \frac{n+2}{n+1}$ pour tout n ∈ ℕ puis retrouver $\lim_{n \to +\infty} u_n$

Exercice n°: 1 (5 pts)

Au 1^{er} janvier 2000 la population d'une ville se répartit également entre locataires et propriétaires.
La population globale ne varie pas, mais, chaque année, pour des raisons familiales ou professionnelles 10% des propriétaires deviennent locataires tandis que 20% des locataires deviennent propriétaires.

1) On désigne par $\boldsymbol{p_n}$ la probabilité qu'un habitant de la ville choisi au hasard soit propriétaires au 1^{er} janvier de l'année $\boldsymbol{2000 + n}$ $(n \in IN)$ et par $\boldsymbol{l_n}$ la probabilité qu'il soit locataire.

La matrice $\boldsymbol{P_0} = (0.5 \quad 0.5)$ traduit l'état probabiliste initial et la matrice $\boldsymbol{P_n} = (\boldsymbol{p_n} \quad \boldsymbol{l_n})$ (avec pour tout n∈ IN, $\boldsymbol{p_n} + \boldsymbol{l_n} = 1$) l'état probabiliste après n années.

a) Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste et en déduire que ce graphe a pour matrice de transition $M = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$.

b) Calculer l'état probabiliste $\boldsymbol{P_1}$

c) D'déterminer l'état stable du graphe .Que peut on conclure pour la population de cette ville ?

2) A l'aide de la relation $\boldsymbol{P_{n+1}} = \boldsymbol{P_n} \times M$, démontrer que pour tout entier naturelle n, $\boldsymbol{p_{n+1}} = 0.7\boldsymbol{p_n} + 0.2$.

3) On considère la suite $(\boldsymbol{U_n})$ définie pour tout entier naturel n par $\boldsymbol{U_n} = \boldsymbol{p_n} - \frac{2}{3}$

a) Démontrer que $(\boldsymbol{U_n})$ est une suite géométrique de raison 0.7.

b) Exprimer $\boldsymbol{U_n}$ en fonction de n et démontrer que $\boldsymbol{p_n}$= (- $\frac{1}{6}$)$\times (0.7)^n$ +$\frac{2}{3}$.

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \boldsymbol{p_n}$ et retrouver le résultat de la question 1) c).

Exercice n°: 4 (6pts)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - 2e^x + 1$.

On désigne par (ζ_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité 2 cm)

1) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) **a)** Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) Vérifier que pour tout $x \neq 0$, on a $\frac{f(x)}{x} = \frac{e^x}{x}(e^x - 2) + \frac{1}{x}$.

c) Déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) **a)** Vérifier que pour tout réel x on a : $f'(x) = 2e^x(e^x - 1)$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

4) Montrer que f réalise une bijection de $]-\infty\,; 0]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

5) Tracer la courbe (ζ_f).

6) Calculer l'aire en cm² de la partie du plan limitée par (ζ_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations : "$x = 0$" et "$x = 1$".

Exercice 1

1	2	3	4	5	6
FAUX	FAUX	VRAI	VRAI	FAUX	FAUX

1) $e^{-2}.e^{3} = e^{-2+3} = e^{1} = e$

2) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln(x)\,dx < 0$ car $\forall x \in \left[\frac{1}{2} \quad 1\right]$ on a $\ln(x) \leq 0.$

3) $\ln(36) = \ln(4 \times 9) = \ln(4) + \ln(9) = \ln(2^2) + ln(3^2) = 2\ln(2) + 2\ln(3) = 2(ln2 + ln3).$

4)$\bar{f} = \frac{1}{1-0}\int_0^1 e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} + 1 = 1 - \frac{1}{e}.$

5) $\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = \lim_{X\to-\infty} X^2e^X = 0$

6) $\lim_{n\to+\infty} -(\frac{7}{8})^n = 0$ car $-1 < \frac{7}{8} < 1$

Exercice2

1)a) ■ $pour$ $n = 0$ on a : $u_0 = 2 > 1$ $(vraie)$

■$Soit$ $n \in IN.$ $Supposons$ $que u_n > 1$,
et $montrons$ $alors$ $que u_{n+1} > 1.$

■on a : $u_n > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{u_n} < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{u_n} > -1 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{u_n} > 1$
$u_{n+1} > 1.$ $Conclusion$ $pour$ $tout$ $n \in IN$ on a : $u_n > 1.$

b) $u_{n+1} - u_n = 2 - \frac{1}{u_n} - u_n = \frac{-u_n^2+2u_n-1}{u_n} = \frac{-(u_n-1)^2}{u_n} \leq 0$
$donc$ $u_{n+1} \leq u_n$ $pour$ $tout$ $n \in IN$; Ainsi la suite (u_n) est ↘
c) $(u_n)$$est$ une $suite$ $décroissante$ et $minorée$ donc elle est convergente.

2) a) $v_{n+1} - v_n = 3 + \frac{1}{u_{n+1}-1} - 3 - \frac{1}{u_n-1} = \frac{1}{2-\frac{1}{u_n}-1} - \frac{1}{u_n-1} = \frac{u_n}{u_n-1} - \frac{1}{u_n-1} = \frac{u_n-1}{u_n-1} = 1,$

$donc$ $(v_n)$$est$ une $suite$ $arithmétique$ de $raison$ $r = 1$ et du $premier$ $terme$ $v_0 = 3 + \frac{1}{u_0-1} = 3 + \frac{1}{2-1} = 4.$

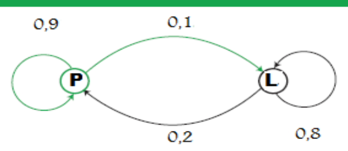
b)$v_n = v_0 + nr = 4 + n$

c) on a : $v_n = 3 + \frac{1}{u_n-1}$ $alors$ $u_n - 1$= $\frac{1}{v_n-3}$ alors u_n= $\frac{v_n-2}{v_n-3}$

Donc $u_n = \frac{n+4-2}{n+4-3} = \frac{n+2}{n+1}.$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n+1}$=1

Exercice3 1a)

Graphe probabiliste	Matrice de transition M associée au graphe
	$M = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix}$

b)$P_1 = P_0 \times M = (0{,}5\ \ 0{,}5)\begin{pmatrix} 0{,}9 & 01 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} = (0{,}55\ \ 045).$

c) Comme la matrice de transition ne comporte pas de 0, il existe un état probabiliste stable P, indépendant de l'état probabiliste initial. La matrice ligne $P = (x\ y)$ vérifie $P = P \times M$ et $x + y = 1.$ Résolvons le système

$$(x\ y) = (x\ \ y)\begin{pmatrix} 0{,}9 & 01 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} = (0{,}9x + 0{,}2y \quad 0{,}1x + 0{,}8y)$$

On obtient le système$\begin{cases} 0{,}9x + 0{,}2y = x \\ 0{,}1x + 0{,}8y = y \end{cases}$ $soit$ $\begin{cases} -0{,}1x + 0{,}2y = 0 \\ 0{,}1x - 0{,}2y = 0 \end{cases}$

Ce système se ramène à la seule équation $x - 2y = 0$.
Sachant que$x + y = 1$, on résout le nouveau système:

$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$ On obtient $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$

Conclusion : au fil des années $\frac{2}{3}$ de la population devient propriétaires.

2) On a: $P_{n+1} = P_n \times M \Leftrightarrow (p_{n+1}\ l_{n+1}) = (p_n\ l_n)\begin{pmatrix} 0{,}9 & 01 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$
Alors $p_{n+1} = 0{,}9p_n + 0{,}2l_n$ or $l_n = 1 - p_n$ alors$p_{n+1} = 0{,}9p_n + 0{,}2(1 - p_n)$= $0{,}7p_n + 0{,}2.$

3) a) $U_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{3} = 0{,}7p_n + 0{,}2 - \frac{2}{3} = 0{,}7p_n + \frac{3}{15} - \frac{10}{15} = 0{,}7p_n - \frac{7}{15} = 0{,}7(p_n - \frac{10}{15}) = 0{,}7U_n$donc (U_n) est une suite géometrique de raison 0,7 et de premier terme $U_0 = p_0 - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}.$

b) $U_n = U_0 \times (0{,}7)^n = \left(-\frac{1}{6}\right) \times (0{,}7)^n$ et comme $U_n = p_n - \frac{2}{3}$
alors $p_n = U_n + \frac{2}{3} = \left(-\frac{1}{6}\right) \times (0{,}7)^n + \frac{2}{3}$

c) comme $\lim_{n\to+\infty} (0{,}7)^n = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{2}{3}$

Exercice 4

1) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 - 0 + 1 = 1$ $alors$ la $droite$
d'équation y =1 est une asymptote a c_f au $v(-\infty)$

2) $a)$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (e^x - 1)^2 = (+\infty - 1)^2 = +\infty$

b) soit x≠ 0 ,$\frac{e^x}{x}(e^x - 2) + \frac{1}{x} = \frac{e^{2x}}{x} - \frac{2e^x}{x} + \frac{1}{x} = \frac{f(x)}{x}$

c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}(e^x - 2) + \frac{1}{x} = +\infty$ $donc$ c_f
$admet$ une $branche$ $parabolique$ de $direction$ $l'axe(oj).$

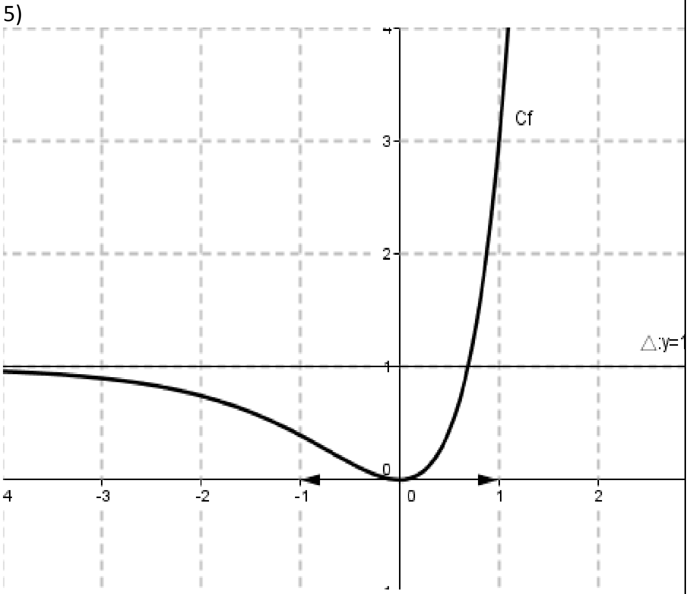
3)a) $f'(x) = 2e^{2x} - 2e^x = 2e^x(e^x - 1).$

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^x(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	
f	1	↘	0	↗	$+\infty$

4)f est $continue$ $stictement$ $décroissante$ sur $]-\infty\,;0]$
$alors$ $elle$ $réalise$ une $bijection$ $de]-\infty\,;0]$ sur [0;1[

5)



6)$A = \int_0^1 |f(x)|\,dx = [\frac{e^{2x}}{2} - 2e^x + x]_0^1 = \frac{e^2}{2} - 2e + \frac{5}{2}.$