Série corrigée : Arithmétiques

Exercice 1 :

1. Déterminer les restes de la division de 5^p par 13 pour p entier naturel.
2. En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, le nombre $N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13.

Correction

1. $p = 0 : 1$, $p = 1 : 5$, $p = 2 : -1$ ou 12, $p = 3 : -5$ ou 8, $p = 4 : 1$ donc
pour $p = 4k$ le reste est 1,
pour $p = 4k+1$ le reste est 5,
pour $p = 4k+2$ le reste est 12 ou -1,
pour $p = 4k+3$ le reste est 8 ou -5.

2. $N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$: $31 = 2\times 13 + 5 \equiv 5(13)$ et $18 = 13\times 1 + 5 \equiv 5(13)$; on a donc
$N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1} \equiv \left[5^{4n+1} + 5^{4n-1}\right](13) \equiv \left[5^{4n+1} + 5^{4n'+3}\right](13) \equiv [5+8](13) \equiv 0(13)$.

Exercice 2 :

Pour chacune des six affirmations, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, en justifiant le choix effectué.

1. Le PGCD de 2 004 et 4 002 est 6.
2. Si p et q sont deux entiers naturels non nuls, $2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$ et par $2^q - 1$.
3. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $2^n - 1$ n'est jamais divisible par 9.
4. L'ensemble des couples d'entiers solutions de l'équation : $24x + 35y = 9$ est l'ensemble des couples : $(-144+70k\ ;\ 99-24k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.
5. Soient A et B deux points distincts du plan ; si on note f l'homothétie de centre A et de rapport 3 et g l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{3}$ alors $g\circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
6. Soit s la similitude d'écriture complexe $z' = iz + (1 - i)$, l'ensemble des points invariants de s est une droite.

Correction

1. **Vrai** : 4 002 = 2 004 × 1+1 998 ; 2 004 = 1 998 × 1+6 ; 1 998 = 6 × 336. Le dernier reste non nul est bien 6.
2. **Vrai** : $2^{pq} - 1 = \left(2^p\right)^q - 1 = \left(2^p\right)^q - 1$; or $a^m - 1 = (a-1)\left(a^{m-1} + a^{m-2} + \ldots + 1\right)$.
3. **Faux** : contre-exemple : $2^6 - 1 = 63$ est divisible par 9.
4. **Faux** : les méthodes habituelles donnent les solutions $(35k - 144\ ;\ 99-24k)$, $k \in \mathbb{Z}$.
5. **Faux** : soit M un point du plan ; son image M_1 par f vérifie $\overrightarrow{AM_1} = 3\overrightarrow{AM}$. Puis l'image M' de M_1 par g vérifie $\frac{1}{3}\overrightarrow{BM_1} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM_1}\right) = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\times 3\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.
6. **Vrai** : les points invariants vérifient $z = iz + (1-i)$, soit avec $z = x + iy$, $x + iy = ix - y + 1 - i$, soit $x + y - 1 + i(y - x + 1) = 0 \Leftrightarrow x + y - 1 = 0$ qui est bien l'équation d'une droite.

Exercice 3 :

Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $(S)\begin{cases} n \equiv 13(19) \\ n \equiv 6(12) \end{cases}$.

1. Démontrer qu'il existe un couple $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs tel que : $19u + 12v = 1$.
(On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple).
Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N = 13\times 12v + 6\times 19u$ est une solution de (S).

2. a. Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système (S) équivaut à $\begin{cases} n \equiv n_0(19) \\ n \equiv n_0(12) \end{cases}$.

b. Démontrer que le système $\begin{cases} n \equiv n_0(19) \\ n \equiv n_0(12) \end{cases}$ équivaut à $n \equiv n_0(12\times 19)$.

3. a. Trouver un couple $(u\ ;\ v)$ solution de l'équation $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante.

b. Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la question 2. b.).
4. Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13.
On divise n par 228 = 12×19. Quel est le reste r de cette division ?

Correction :

$(S)\begin{cases} n\equiv 13(19) \\ n\equiv 6(12) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n\equiv 13+19k \\ n\equiv 6+12k' \end{cases}.$

1. Théorème de Bézout : 19 et 12 sont premiers entre eux donc il existe un couple (u ; v) d'entiers relatifs tel que : $19u + 12v = 1$.
$N=13\times 12v+6\times 19u$ est une solution de (S) : il faut mettre N sous la forme $N\equiv 13+19k$. Or $12v=1-19u$ donc $N=13(1-19u)+6\times 19u=13+19\times(-7u)$; ok.
De même $N=13\times 12v+6\times 19u=13\times 12v+6(1-12v)=6+12\times 7v$; ok.

2. a. Si n_0 est une solution de (S), on a $\begin{cases} n_0=13+19k_0 \\ n_0=6+12k'_0 \end{cases}$ d'où en soustrayant ligne à ligne :
$\begin{cases} n-n_0=19(k-k_0) \\ n-n_0=12(k'-k'_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n\equiv n_0(19) \\ n\equiv n_0(12) \end{cases}.$
b. En fait 19 divise $n-n_0$ de même que 12 ; comme ils sont premiers entre eux, 19×12 divise $n-n_0$, ce qui équivaut à $n\equiv n_0(12\times 19)$.
3. a. Avec l'algorithme d'Euclide on a $19(-5)+12(8)=1$; on peut donc prendre $u = -5$ dans $N=13+19\times(-7u)$, ce qui donne $N=678$; de même on prend $v = 8$ et $N=6+12\times(7v)$, ce qui redonne bien $N=678$.
b. $n\equiv n_0(12\times 19)\equiv 678(12\times 19)\equiv 678(228)\equiv 222(228)$.
4. 222.

Exercice 4 :

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par $u_0 = 14$, $u_{n+1} = 5u_n - 6$ pour tout entier naturel n.
1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+2}\equiv u_n(\text{modulo } 4)$. En déduire que pour tout entier naturel k, $u_{2k}\equiv 2(\text{modulo } 4)$ et $u_{2k+1}\equiv 0(\text{modulo } 4)$.
3. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2u_n = 5^{n+2}+3$.
b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $2u_n\equiv 28(\text{modulo } 100)$.
4. Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.
5. Montrer que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite (u_n) est constant. Préciser sa valeur.

Correction

1. On calcule $u_1 = 64$, $u_2 = 314$, $u_3 = 1\,564$, $u_4 = 7\,814$.
On peut conjecturer que $u_{2k} = \ldots 14$ et $u_{2k+1} = \ldots 64$.
2. $u_{n+2}=5u_{n+1}-6=5(5u_n-6)-6=25u_n+36$. Or $24u_n+36\equiv 0[4]$, donc $u_{n+2}\equiv(u_n+24u_n+36)[4]\equiv(u_n+0)[4]\equiv u_n[4]$.
On en déduit par récurrence que $u_{2k}\equiv u_0[4]$ or $u_0\equiv 2[4]$ donc, pour tout naturel k, $u_{2k}\equiv 2[4]$.
De même $u_{2k+1}\equiv u_1[4]$ or $u_1=64\equiv 0[4]$ donc, pour tout naturel k, $u_{2k+1}\equiv 0[4]$.
3. a. Au rang 0 : $2u_0 = 28 = 52 + 3$: vrai.
Supposons que pour l'entier n, on ait $2u_n=5^{n+2}+3$ alors
$2u_{n+1}=2(5u_n-6)=5\times 2u_n-12=5\left(5^{n+2}+3\right)-12=5^{n+3}+15-12=5^{n+3}+3$.
La relation est donc vraie au rang $n+1$.
b. On a $2u_n=5^{n+2}+3$ or $5^n\equiv 1[4]\Rightarrow 5^{n+2}\equiv 25[100]$ en multipliant tout par 25 ; finalement $2u_n\equiv(25+3)[100]\equiv 28[100]$.

4. La relation précédente donne $u_n = 14 + 50k, k \in \mathbb{Z}$; mais comme $u_{2k} \equiv 2[4]$ et que $14 \equiv 2[4]$, il faut $50k \equiv 0[4]$ et donc lorsque k est pair $u_k \equiv 14[100]$, lorsque k est impair $u_k \equiv 14 + 50[100] \equiv 64[100]$.

5. On voit que le PGCD de 14 et 64 est 2 ; il faut donc montrer que c'est le cas. Comme on a $5u_n - u_{n+1} = 6$, la relation de Bézout montre que PGCD(u_{n+1} ; u_n) est un diviseur de 6. Or 3 divise 3 mais pas 5 donc 3 ne divise pas $2u_n = 5^{n+2} + 3$. Conclusion : PGCD(u_{n+1} ; u_n) = 2.

Exercice 5 :

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $A(n) = n^4 + 1$.

L'objet de l'exercice est l'étude des diviseurs premiers de $A(n)$.

1. Quelques résultats

a. Étudier la parité de l'entier $A(11)$.

b. Montrer que, quel que soit l'entier n, $A(n)$ n'est pas un multiple de 3.

c. Montrer que tout entier d diviseur de $A(n)$ est premier avec n.

d. Montrer que, pour tout entier d diviseur de $A(n)$: $n^8 \equiv 1 \text{ mod } d$.

2. Recherche de critères

Soit d un diviseur de $A(n)$. On note s le plus petit des entiers naturels non nuls k tels que $n^k \equiv 1 \text{ mod } d$.

a. Soit k un tel entier. En utilisant la division euclidienne de k par s, montrer que s divise k.

b. En déduire que s est un diviseur de 8.

c. Montrer que si, de plus, d est premier, alors s est un diviseur de $d - 1$.
On pourra utiliser le petit théorème de Fermat.

3. Recherche des diviseurs premiers de $A(n)$ dans le cas où n est un entier pair

Soit p un diviseur premier de $A(n)$. En examinant successivement les cas $s = 1$, $s = 2$ puis $s = 4$, conclure que p est congru à 1 modulo 8.

Correction :

1. *a.* $A(11)=11^4+1$. 11 est impair donc 11^4 l'est également et donc $A(11)$ est pair (somme de deux nombres impairs).

b. On peut procéder par disjonction des cas :
• ou bien $n \equiv 0 \mod 3$. Alors $n^4 \equiv 0 \mod 3$ donc $A(n) \equiv 1 \mod 3$
• ou bien $n \equiv 1 \mod 3$. Alors $n^4 \equiv 1 \mod 3$ donc $A(n) \equiv 2 \mod 3$
• ou bien $n \equiv 2 \mod 3$. Alors $n \equiv -1 \mod 3$, $n^4 \equiv 1 \mod 3$ donc $A(n) \equiv 2 \mod 3$
Dans aucun de ces cas $A(n)$ n'est congru à 0 modulo 3 donc $A(n)$ n'est pas un multiple de 3.

c. Soit d un diviseur de $A(n)$. Il existe donc un entier q tel que $n^4+1=dq$, ce qui peut également s'écrire : $d\times q-n\times n^3=1$. D'après le théorème de Bézout, d et n sont premiers entre eux.

d. Comme à la question précédente, l'égalité $n^4+1=dq$ donne $n^4=-1+dq$, d'où $n^4\equiv -1 \mod d$.
Appliquez les théorème sur les congruences : $\left(n^4\right)^2 \equiv (-1)^2 \mod d$ c'est-à-dire $n^8 \equiv 1 \mod d$.

2. *a.* La division euclidienne de k par s donne $k=s\times q+r$, avec $0\leqslant r<s$.
$n^k \equiv 1 \mod d$ donne $n^{sq+r}\equiv 1 \mod d$, c'est-à-dire $\left(n^s\right)^q\times n^r\equiv 1 \mod d$ or $n^s\equiv 1 \mod d$ donc $n^r\equiv 1 \mod d$ mais comme s est le **plus petit** k **non nul** tel que $n^k\equiv 1 \mod d$ et comme $0\leqslant r<s$, la seule possibilité est donc $r=0$ d'où $k=s\times q$. s divise donc k.

b. On a montré, au **1.*d.*** que $n^8\equiv 1 \mod d$. Posons $k=8$ et appliquons le résultat de la question précédente : s divise k, c'est-à-dire 8.

c. Rappelons le petit théorème de Fermat :
Soit p un nombre premier et a un entier naturel non nul premier avec p ; alors $a^{p-1}-1$ est divisible par p, ce qui revient à dire : $a^{p-1}\equiv 1 \mod p$.
Si d est premier, comme on sait déjà que d et n sont premiers entre eux (question **1.*c.***), il suffit d'appliquer le théorème en remplaçant p par d et a par n. On obtient : $n^{d-1}\equiv 1 \mod d$.
On utilise alors le résultat du **2.*a.*** : s divise k, c'est-à-dire ici $d-1$.

3. On sait déjà que p divise $A(n)$, c'est-à-dire p divise n^4+1 d'où l'existence d'un entier q tel que $n^4+1=p\times q$, $n^4=-1+p\times q$, $n^4\equiv -1 \mod p$.

- Si $s=1$, alors $n^1\equiv 1 \mod p$, d'où $n^4\equiv 1 \mod p$
- Si $s=2$, alors $n^2\equiv 1 \mod p$, d'où $n^4\equiv 1 \mod p$
- Si $s=4$, alors $n^4\equiv 1 \mod p$

Dans tous ces cas, on arrive à la même conclusion : $n^4\equiv 1 \mod p$ et comme $n^4\equiv -1 \mod p$, on obtient $1\equiv -1 \mod p$, mieux : $2\equiv 0 \mod p$ d'où p divise 2. Comme p est premier on a $p=2$, ce qui est impossible puisque p et n sont premiers entre eux (question **1.*c.***) et n est pair.
La seule possibilité est donc $s=8$.
D'après la question **2.*c.***, s divise $p-1$ donc p est congru à 1 modulo s, c'est-à-dire à 1 modulo 8.

4. 12 est pair. On peut donc appliquer le résultat de la question précédente : tout diviseur premier p de $A(12)$ est congru à 1 modulo 8. Il fait donc partie de la liste : 17, 41, 73, 89, 97, 113, 137, …
$A(12) = 12^4 + 1 = 20737$.
   - 20737 n'est pas divisible par 17 puisque $20737 = 17 \times 1219 + 14$.
   - 20737 n'est pas divisible par 41 puisque $20737 = 41 \times 505 + 32$.
   - 20737 n'est pas divisible par 73 puisque $20737 = 73 \times 284 + 5$.
   - 20737 est divisible par 89 puisque $20737 = 89 \times 233$.

   L'avantage de ces essais est de ne pas avoir à chercher directement tous les diviseurs de 20737.
   Reste à savoir s'il n'y a pas d'autres diviseurs premiers de 20737.

On peut, pour cela, montrer que 233 est lui-même un nombre premier :
Il n'est pas divisible par 2, par 3, par 5 (voir critères de divisibilité), par 7 puisque $233 = 7\times33+2$, par 11 puisque $233=11\times21+2$, par 13 puisque $233=13\times17+12$. On arrête puisque $\sqrt{233} \approx 15,3$.
$233 = 8\times29 + 1$. Il est bien congru à 1 modulo 8.
$A(12)$ a donc exactement deux diviseurs premiers : 89 et 233.

Exercice 6 :

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un entier naturel n dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009, c'est-à-dire tel que $n^3 \equiv 2009 \pmod{10000}$.

Partie A

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2009^2 par 16.
2. En déduire que $2009^{8001} \equiv 2009 \pmod{16}$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$u_0 = 2009^2 - 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1$.

1. **a.** Démontrer que u_0 est divisible par 5.

   b. Démontrer, en utilisant la formule du binôme de Newton, que pour tout entier naturel n,
   $u_{n+1} = u_n\left[u_n^4 + 5\left(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1\right)\right]$.

   c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n est divisible par 5^{n+1}.
2. **a.** Vérifier que $u_3 = 2009^{250} - 1$ puis en déduire que $2009^{250} \equiv 1 \pmod{625}$.

   b. Démontrer alors que $2009^{8001} \equiv 2009 \pmod{625}$.

Partie C

1. En utilisant le théorème de Gauss et les résultats établis dans les questions précédentes, montrer que $2009^{8001} - 2009$ est divisible par 10000.
2. Conclure, c'est-à-dire déterminer un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009.

Correction :

Partie A

1. $2009 = 16\times125 + 9$ donc $2009 \equiv 9$ (modulo 16).
$2009^2 \equiv 81$ (modulo 16) et comme $81 = 16\times5 + 1$, $2009^2 \equiv 1$ (modulo 16)
Le reste de la division euclidienne de 2009^2 par 16 est 1

2. $2009^{8001} = 2009^{2\times4000+1} = \left(2009^2\right)^{4000} \times 2009$ donc $2009^{8001} \equiv 1^{4000}\times2009$ (modulo 16)

c'est-à-dire $2009^{8001} \equiv 2009$ (modulo 16).

Partie B

1. ***a.*** $2009 = 5\times402 - 1$ donc $2009 \equiv -1$ (modulo 5) donc $2009^2 \equiv 1$ (modulo 5)
donc $2009^2 - 1 \equiv 0$ (modulo 5) c'est-à-dire que u_0 est divisible par 5.

b. Pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1 = u_n^{\ 5} + 5u_n^{\ 4} + 10u_n^{\ 3} + 10u_n^{\ 2} + 5u_n + 1 - 1$$

$$u_{n+1} = u_n^{\ 5} + 5u_n^{\ 4} + 10u_n^{\ 3} + 10u_n^{\ 2} + 5u_n$$

$$u_{n+1} = u_n\left(u_n^{\ 4} + 5u_n^{\ 3} + 10u_n^{\ 2} + 10u_n + 5\right)$$

$$u_{n+1} = u_n\left[u_n^{\ 4} + 5\left(u_n^{\ 3} + 2u_n^{\ 2} + 2u_n + 1\right)\right].$$

c. rai.par récurrence : La propriété « u_n est divisible par 5^{n+1} » est vraie pour $n = 0$ puis-

que d'après le **1.*a.*** u_0 est divisible par 5, c'est-à-dire u_0 est divisible par 5^{0+1}.
Soit n un entier naturel quelconque mais fixé.
Si u_n est divisible par 5^{n+1}, alors il existe un entier k tel que $u_n = k\times5^{n+1}$

$$u_{n+1} = k\times5^{n+1}\left[k^4\times5^{4n+4} + 5\left(k^3\times5^{3n+3} + 2k^2\times5^{2n+2} + 2k\times5^{n+1} + 1\right)\right]$$

$$u_{n+1} = k\times5^{n+1}\times5\left[k^4\times5^{4n+3} + \left(k^3\times5^{3n+3} + 2k^2\times5^{2n+2} + 2k\times5^{n+1} + 1\right)\right]$$

$$u_{n+1} = k \times 5^{n+2}\Big[\underbrace{k^4 \times 5^{4n+3} + \left(k^3 \times 5^{3n+3} + 2k^2 \times 5^{2n+2} + 2k \times 5^{n+1} + 1\right)}_{\text{nombre entier}}\Big]$$

u_{n+1} est divisible par 5^{n+2}

u_{n+1} est divisible par 5^{n+1+1}

Conclusion : La propriété « u_n est divisible par 5^{n+1} » est vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir de $n = 0$. D'après le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

2. ***a.*** $u_0 = 2009^2 - 1$ donc $u_1 = (u_0 + 1)^5 - 1 = \left(2009^2 - 1 + 1\right)^5 - 1 = 2009^{10} - 1$

$u_2 = (u_1 + 1)^5 - 1 = \left(2009^{10} - 1 + 1\right)^5 - 1 = 2009^{50} - 1$

$u_3 = (u_2 + 1)^5 - 1 = \left(2009^{50} - 1 + 1\right)^5 - 1 = 2009^{250} - 1$

D'après la question précédente, u_3 est divisible par $5^{3+1} = 5^4 = 625$.

$2009^{250} - 1$ est donc divisible par 625, autrement dit $2009^{250} - 1 \equiv 0$ (modulo 625) d'où $2009^{250} \equiv 1$ (modulo 625).

b. $2009^{8001} = 2009^{250 \times 32 + 1} = \left(2009^{250}\right)^{32} \times 2009$.

Puisque $2009^{250} \equiv 1$ (modulo 625), $2009^{8001} \equiv 1^{32} \times 2009$ (modulo 625) donc $2009^{8001} \equiv 2009$ (modulo 625).

Partie C

1. On a vu au **A. 2.** que $2009^{8001} \equiv 2009$ (modulo 16). donc que $2009^{8001} - 2009$ est divisible par 16. Il existe donc un entier q tel que $2009^{8001} - 2009 = 16q$.

On vient de voir au B.2.b. que $2009^{8001} \equiv 2009$ (modulo 625). donc que $2009^{8001} - 2009$ est divisible par 625. Il existe donc un entier q' tel que $2009^{8001} - 2009 = 625q'$.

Puisque $16q = 625q'$, 16 divise $625q'$ et comme 16 est premier avec 625, 16 divise q'. Il existe donc un entier m tel que $q' = 16m$ d'où $2009^{8001} - 2009 = 625 \times 16m = 10000m$ ce qui prouve que $2009^{8001} - 2009$ est divisible par 10000.

2. $8001 = 2667 \times 3$. De la question précédente, on tire : $\left(2009^{2667}\right)^3 = 10000m + 2009$ ce qui prouve que le nombre entier naturel 2009^{2667} a un cube qui se termine par 2009.