Série corrigée coniques

Exercice 1 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$.

1- On considère les points A(-1,0) et I(4,0).Soit € l'ellipse de centre I, dont un sommet est A et bun foyer est O .

a- Déterminer les trois autres sommets de (E)

b- Calculer l'excentricité de (E), et donner une équation de sa directrice associé au foyer O dans le repère $(o,\vec{u},\vec{v})$

c- Former une équation de (E) dans le repère $(I,\vec{u},\vec{v})$ d'origine le centre de l'ellipse

d- Tracer (E)

2- Soit l'équation (E_θ) : $z^2-2(4+5\cos\theta)z+(4\cos\theta+5)^2=0$, $\theta\in[0,\pi]$

a- Résoudre (E_θ) .On note z_1 la solution dont la partie imaginaire est strictement positive z_2 l'autre solution

b- Lorsque θ décrit l'intervalle $[0,\pi]$,déterminer l'ensemble des points M_1 d'affixe z_1 dans le repère $(I,\vec{u},\vec{v})$ .En déduire l'ensemble des points $M_2(z_2)$

Correction :

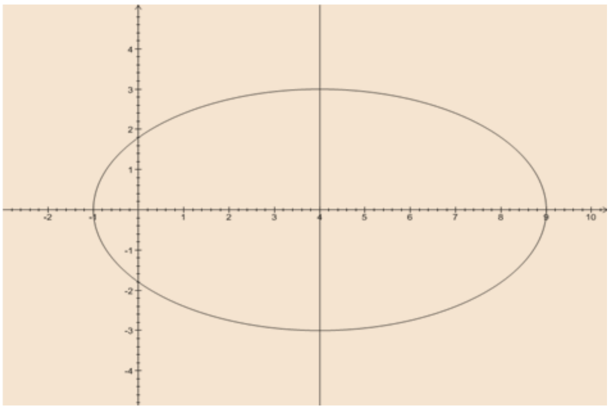
1-a-Détermination des sommets de (E)

On a A(-1,0) est un point de l'axe des abscisses .et A est un sommet de (E) de foyer O donc (ox) est l'axe focal de (E) ; l'axe non focal de (E) est donc la droite passant par I et parallèle à l'axe des ordonnées et pour sommets les points $A'=S_I(A)$ donc A'(4+5,0).Les sommets B et B' de l'axe non focal sont les points d'abscisse 4 tels que IB=IB' et $IO^2=IA^2-IB^2$ on a donc $IB=IA^2-IO^2=5^2-4^2=25-16=9$ et par suite B (4,3) et B'(4,-3)

b- L'excentricité de (E) est $e=\frac{IO}{IA}=\frac{4}{5}$

L'équation de la directrice (D) associé à O , dans le repère $(o,\vec{u},\vec{v})$ est (D) :$x=4-\frac{IA^2}{IO}=-\frac{9}{4}$

c- L'équation de de (E) dans le repère $(I,\vec{u},\vec{v})$ est : $\frac{X^2}{IA^2}+\frac{Y^2}{IB^2}=1$ soit $\frac{X^2}{5^2}+\frac{Y^2}{3^2}=1$



2- a -(E_θ) : $z^2-2(4+5\cos\theta)z+(4\cos\theta+5)^2=0$; $\theta\in[0,\pi]$

$\Delta'=(4+5\cos\theta)^2-(4\cos\theta+5)^2=-9\sin^2\theta=(3i\sin\theta)^2$

donc $z_1= 4\cos\theta+5+3i\sin\theta$ et $z_2=4\cos\theta+5-3i\sin\theta = \overline{z_1}$

Les coordonnées de M_1 dans le repère $(o,\vec{u},\vec{v})$ sont donc $M_1(4\cos\theta+5, 3\sin\theta)$ et dans le repère $(I,\vec{u},\vec{v})$ on aura $M_1(5\cos\theta,3\sin\theta)$ en

effets : $\overrightarrow{IM_1} = \overrightarrow{IO} + \overrightarrow{OM_1} = -4\vec{u} + (4+5\cos(\theta))\vec{u} + (3\sin(\theta))\vec{v} = (5\cos(\theta))\vec{u} + (3\sin(\theta))\vec{v}$

On pose $M_1(X,Y)$ avec $X = 5\cos\theta$ et $Y= 3\sin\theta$. L'équation cartésienne de de l'ensemble des point M_1 dans le repère $(I,\vec{u},\vec{v})$ est :

$(I,\vec{u},\vec{v})$ est alors $\dfrac{X^2}{5^2}+\dfrac{Y^2}{3^2}=1$ avec $Y>0$ car $\theta\in[0,\pi]$ donc $Y = 3\sin\theta>0$ ainsi l'ensembles des points M_1

est l'arc de l'ellipse (E) situé au-dessus de l'axe des abscisses et on a $z_2 = \overline{z_1}$ donc M_2 est le symétrique de M_1 par rapport l'axe des abscisses et l'ensembles des points M_2 est alors l'arc de (E) situé au-dessous de l'axe des abscisses

Exercice 2 :

FGH est un triangle équilatéral de coté de longueur L .Soit (H) l'hyperbole de foyer F de directrice (GH) et d'excentricité 2

1-Déterminer les sommets S et S' de cette hyperbole (On remarquera que S et S' sont sur la hauteur issue de F dans le triangle FGH), son centre O et le deuxième foyer F'.Calculer en Fonction de L, la distance des sommets 2a et la distance des foyers 2c

2-On choisit le repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ où O est le centre de l'hyperbole et $\vec{u}$ un vecteur unitaire de la demi droite $[OF)$ .Ecrire une équation de (H) .Donner l'allure de (H)

Correction :

On a F est un foyer de (H) et (GH) la directrice associé donc les sommets S et S' sont situes sur la perpendiculaire à (GH) issue de F. Soit K le projeté orthogonale de F sur (GH) ;puisque e=2 on aura

$\overrightarrow{SF} = -2\overrightarrow{SK}$ donc S est le centre de gravité du triangle FGH puisqu'il est équilatérale et la hauteur issue de F est une médiane de FGH

Le sommet S' vérifie $\overrightarrow{S'F} = 2\overrightarrow{S'K}$ donc $S_K(F)=S'$; $O=S*S'$ et $F'= S_O(F)$

La distance des sommets est 2a = SS'=SK +KS' et on a SK

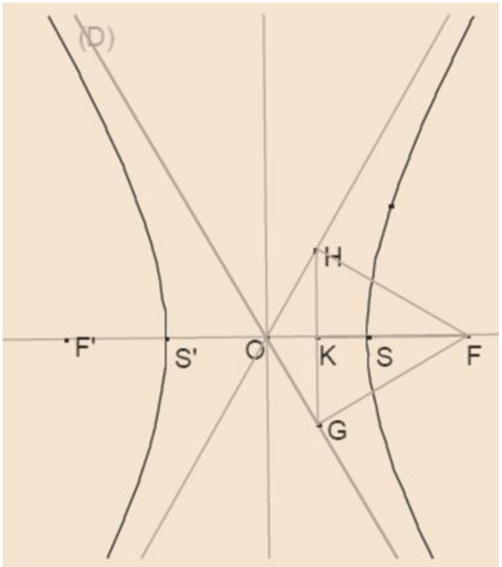
$=\dfrac{1}{3}FK = \dfrac{1}{3}\sqrt{l^2-\left(\dfrac{l}{2}\right)^2} = \dfrac{l\sqrt{3}}{6}$ et $KS' = KF = \dfrac{l\sqrt{3}}{2}$ donc on obtient $2a = SS' = \dfrac{4l\sqrt{3}}{6} = \dfrac{2l\sqrt{3}}{3}$

La distance focal est $2c = FF'=2FO=2(FS+SO)=\dfrac{4}{3}FK + SS' = \dfrac{4}{3}\dfrac{l\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4l\sqrt{3}}{3}$

2- L'équation de (H) est $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$; $a^2=\dfrac{l^2}{3}$; $b^2=c^2-a^2=l^2$

L'équation de (H) est alors (H) : $\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{l}{\sqrt{3}}\right)^2}-\dfrac{y^2}{l^2}=1$

Les asymptote de (H) sont (D) : $y=-\dfrac{b}{a}x=-\sqrt{3}x$ et (D') $y=\dfrac{b}{a}x=\sqrt{3}x = tg\,\dfrac{\pi}{3}x$ .Le triangle OHS est équilaterale puisque l'on a OK=KS=$\dfrac{1}{2}SF=\dfrac{1}{2}SH$ donc les asymptote sont les droites (OH) et(OG)

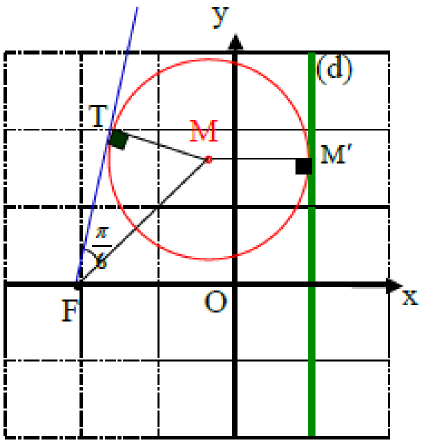


Exercice 3 :

On considère le point F(-2 ; 0) et la droite (d) d'équation x = 1 .

Soit (C) un cercle variable de centre M tel que :

- La droite (d) est tangente en M' à (C).
- (FT) est tangente à (C) en T.
- L'angle $\widehat{TFM}$ reste égale à $\dfrac{\pi}{6}$.



1) Démontrer que $\dfrac{MF}{MM'}=2$ et déduire que M décrit une conique (H) dont on précisera la nature, le foyer , la directrice et l'excentricité.

2) Vérifier que les points O et A (4 ; 0) sont les sommets de (H) et en déduire le centre et le second foyer de (H).

3) a- Ecrire une équation de (H) et déterminer ses asymptotes.

b- Vérifier que le point B (6 ; 6) est un point de (H) et écrire une équation de la tangente (Δ) en B à (H).

c- Tracer (Δ) et (H).

4) Soit (D) le domaine limité par la conique (H), la tangente (Δ) et la droite d'équation x = 4.

Calculer le volume engendré par la rotation de (D) autour de l'axe des abscisses.

Correction :

1. $\frac{MF}{MM'} = \frac{MF}{MT}$; le triangle MTF est semi-équilatéral donc $\frac{MF}{MT} = \frac{1}{\sin\hat{F}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$, d'où

$\frac{MF}{MM'} = 2$ et M décrit l'hyperbole (H) de foyer F, de directrice (d) et d'excentricité 2.

2. (OF) est l'axe focal ; $\frac{OF}{OK} = \frac{AF}{AK} = 2$ où $\{K\} = (d) \cap (O, \vec{i})$ donc O et A sont les sommets de (H).

Le centre I est le milieu de [OA] d'où I(2 ; 0) . I est le milieu de [FF'] d'où F'(6 ; 0).

3.a) M(x ; y) , M'(1 ; y) , F(– 2 ; 0)

$M \in (H) \Leftrightarrow \frac{MF}{MM'} = 2 \Leftrightarrow MF^2 = 4\,MM'^2 \Leftrightarrow (x+2)^2 + y^2 = 4(x-1)^2 \Leftrightarrow 3x^2 - y^2 - 12x = 0$

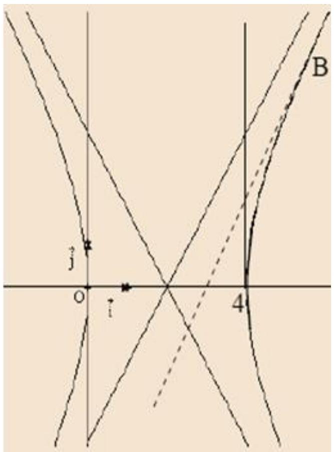
➜**OU** : 2a = OA = 4 ; a = 2 ; 2c = FF' = 8 ; c = 4 donc $b^2 = c^2 - a^2 = 12$

I(2 ; 0) est le centre de (H), donc (H) : $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

Asymptotes : $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 0$; $y = \sqrt{3}\,(x-2)$ ou $y = -\sqrt{3}\,(x-2)$.

b) Pour x = 6 et y = 6 on a $\frac{(6-2)^2}{4} - \frac{6^2}{12} = 1$, d'où B est un point de (H).

Equation de (Δ) : $\frac{(x-2)(x_B-2)}{4} - \frac{yy_B}{12} = 1$; y = 2x – 6.



c) $V = \pi\int_4^6 [4(x-3)^2 - (3x^2 - 12x)]dx = \pi\left[\frac{4}{3}(x-3)^3 - x^3 + 6x^2\right]_4^6 = \frac{8\pi}{3}u^3.$

Exercice 4 :

L'unité graphique est 3 cm.

On donne les paraboles (P) et (P') d'équations respectives $y^2 = 2x - 1$ et $x^2 = 2y - 1$.

1) Déterminer le sommet, le foyer et la directrice de chacune de ces deux paraboles (P) et (P').

2) Vérifier que le point A (1 ; 1) est commun à (P) et (P') et démontrer que (OA) est une tangente commune aux deux paraboles.

3) Démontrer que la perpendiculaire (d) en O à (OA) est une tangente commune à (P) et (P').

4) Tracer (d) , (P) et (P').

5) a) Montrer que l'aire du domaine limité par (P), l'axe des abscisses et la droite d'équation x = 1 vaut 3 cm^2.

b) Déduire l'aire, en cm^2, du domaine limité par (P), (P') , l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

Correction :

(P) : $y^2 = 2x - 1 = 2(x - \frac{1}{2})$ et (P') : $x^2 = 2y - 1$.

1. P) de sommet $S(\frac{1}{2}, 0)$, de foyer F(1 ;0) et de directrice $(O, \vec{j})$.

(P') de sommet $S'(0, \frac{1}{2})$, de foyer F'(0 ;1) et de directrice $(O, \vec{i})$.

2. Les coordonnées de A vérifient les équations de (P) et de (P') , donc A est un point commun à ces paraboles.

► (OA) : y = x

(OA) $\cap$ (P) : $x^2 = 2x - 1$; $(x - 1)^2 = 0$, x' = x'' = 1(racine double)

(OA) est tangente à (P) en A.

(OA) $\cap$ (P') : $y^2 = 2y - 1$; $(y - 1)^2 = 0$, y' = y'' = 1(racine double)

(OA) est tangente à (P') en A.

► Ou : 2yy' = 2 , $y' = \frac{1}{y}$ et $y_A' = 1$; l'équation de la tangente en A à (P) est y – 1 = 1(x – 1) ;

y = x c'est (OA) .

De même pour (P').

► Soit en remarquant que (OA) est la bissectrice de $F\hat{A}F'$.

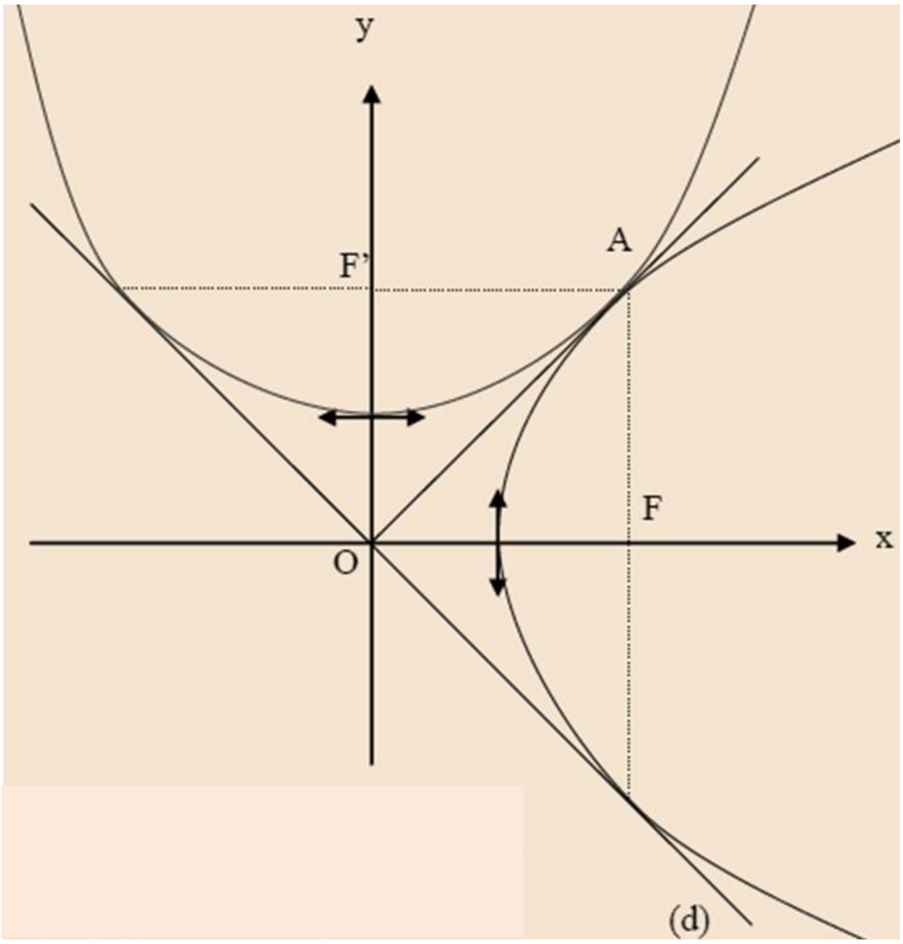
1. (d) : $y = -x$.

$(d) \cap (P)$: $x^2 = 2x - 1$; racine double $x' = x'' = x_A$.

$(d) \cap (P')$: $y^2 = 2y - 1$; racine double $y' = y'' = y_A$.

▶ Ou (d) est la symétrique de (OA) par rapport à l'axe focal (axe de symétrie) de (P) donc (d) est une tangente à (P) .De même (d) est symétrique de (OA) par rapport à l'axe focal (y'y) de (P').

2.



3. S est l'aire demandée.
L'aire limitée par (P) , (x'x) et la droite x = 1 est égale

à laire limitée par (P') , (y'y) et la droite y = 1 .

S = (l'aire du carré OFAF') – 2×3 = 9 – 6 = 3 cm^2 .