<u>Série : Loi continue (4 M)</u>

Exercice 1:

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de quatre questions indépendantes.

Pour chacune d'elles, une seule des quatre propositions est exacte.

1. Dans un stand de tir, la probabilité pour un tireur d'atteindre la cible est de 0,3.

On effectue n tirs supposés indépendants. On désigne par p_n la probabilité d'atteindre la cible au moins une fois sur ces n tirs.

La valeur minimale de n pour que p_n soit supérieure ou égale à 0,9 est :

a. 6	b. 7	c. 10	d. 12

2. On observe la durée de fonctionnement, exprimée en heures, d'un moteur Diesel jusqu'à ce que survienne la première panne. Cette durée de fonctionnement est modélisée par une variable aléatoire X définie sur $]0\,;+\infty[$ et suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0002$. Ainsi, la probabilité que le moteur tombe en panne avant l'instant t est $p(X \le t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda t}\,dt$.

La probabilité que le moteur fonctionne sans panne pendant plus de 10 000 heures est, au millième près :

a. 0,271	b. 0,135	c. 0,865	d. 0,729

3. Un joueur dispose d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. À chaque lancer, il gagne s'il obtient 2, 3, 4, 5 ou 6 ; il perd s'il obtient 1.

Une partie est constituée de 5 lancers du dé, successifs et indépendants.

La probabilité pour que le joueur perde 3 fois au cours d'une partie est :

a. $\frac{125}{3888}$	b. $\frac{625}{648}$	c. $\frac{25}{7776}$	d. $\frac{3}{5}$

4. Soient A et B deux événements indépendants d'une même univers Ω tels que $p(A)$= 0,3 et $p(A \cup B) = 0{,}65$. La probabilité de l'événement B est :

a. 0,5	b. 0,35	c. 0,46	d. 0,7

Exercice 2 :

On choisit un nombre réel α au hasard dans [0 ; 1].

Sachant que ce nombre α est supérieur à 0,6, quelle est la probabilité pour qu'il soit inférieur à 0,95 ?

Sachant que ce nombre α est supérieur à 0,963, quelle est la probabilité pour que dans l'écriture décimale de α, le deuxième chiffre après la virgule soit multiple de 3 ?

Exercice 3 :

On veut modéliser le choix d'un nombre réel dans [0 ; 1] par une loi (non uniforme) ayant pour densité la fonction f définie sur [0 ; 1] par $f(x) = \lambda x^2$ où λ est un réel fixé.

Justifier que ceci n'est possible qu'avec un seul réel λ que l'on déterminera.

Donner alors la valeur de $p\left(\left[0\,;\frac{1}{2}\right]\right)$; $p\left(\left[\frac{1}{2}\,;1\right]\right)$; p([0 ; 0,1]) ; p([0,9 ; 1])

Exercice 4 :

Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 25 % au premier fournisseur et 75 % au second.

La proportion de composants défectueux est de 3 % chez le premier fournisseur et de 2 % chez le second.
On note :

– D l'évènement « le composant est défectueux » ;

– F_1 l'évènement « le composant provient du premier fournisseur » ;

– F_2 l'évènement « le composant provient du second fournisseur ».

1. a. Dessiner un arbre pondéré.

b. Calculer $p(D \cap F_1)$, puis démontrer que $p(D) = 0{,}0225$.

c. Sachant qu'un composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur ?

Dans toute la suite de l'exercice, on donnera une valeur approchée des résultats à 10^{-3} *près.*

2. Le responsable commande 20 composants. Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux soient défectueux ?

3. La durée de vie de l'un de ces composants est une variable aléatoire notée X qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement ou loi exponentielle de paramètre λ, avec λ réel strictement positif.

a. Sachant que $p(X > 5) = 0{,}325$, déterminer λ.

Pour les questions suivantes, on prendra $\lambda = 0{,}225$.

b. Quelle est la probabilité qu'un composant dure moins de 8 ans ? plus de 8 ans ?

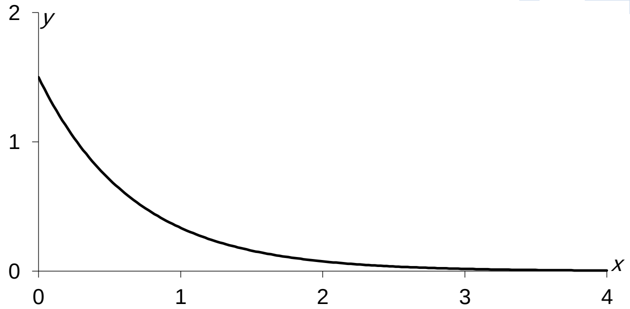
c. Quelle est la probabilité qu'un composant dure plus de 8 ans sachant qu'il a déjà duré plus de 3 ans ?

Exercice 5 :

Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. On rappelle que $P(X \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t} dt$. La courbe donnée ci-dessous représente la fonction densité associée.

1. Interpréter sur le graphique la probabilité $P(X \leq 1)$.

2. Indiquer sur le graphique où se lit directement le paramètre λ.



Partie B

On pose $\lambda = 1{,}5$. 1. Calculer $P(X \leq 1)$, en donner une valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près par excès.

2. Calculer $P(X \leq 2)$. 3. Déduire des calculs précédents l'égalité suivante : $P(1 \leq X \leq 2) = 0{,}173$ à 10^{-3} près.

4. Calculer l'intégrale $\int_0^x 1{,}5te^{-1{,}5t} dt$. Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $F(x)$; on obtient ainsi l'espérance mathématique de la variable X.

Partie C

Une machine outil fabrique des cylindres. On mesure l'écart, en dixièmes de millimètres, entre le diamètre des cylindres et la valeur de réglage de la machine. On suppose que cet écart suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1{,}5$.

Si l'écart est inférieur à 1, le cylindre est accepté. Si l'écart est compris entre 1 et 2, on procède à une rectification qui permet d'accepter le cylindre dans 80 % des cas. Si l'écart est supérieur à 2, le cylindre est refusé.

1. On prélève au hasard un cylindre dans la production.

a. Montrer que la probabilité qu'il soit accepté est égale à 0,915 à 10^{-3} près.

b. Sachant qu'il est accepté, quelle est la probabilité qu'il ait subi une rectification ?

2. On prélève de manière indépendante dix cylindres de la production. On suppose que le nombre de cylindres est suffisamment important pour assimiler ce tirage à un tirage successif avec remise.

a. Quelle est la probabilité que les dix cylindres soient acceptés ?

b. Quelle est la probabilité qu'au moins un cylindre soit refusé ?

Exercice 6 :

La durée de vie d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda > 0$.

Ainsi, la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant t est égale à $P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

1. Déterminer λ, arrondi à 10^{-1} près, pour que la probabilité $P(X > 6)$ soit égale à 0,3. Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,2$.
2. À quel instant t, à un mois près, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est-elle de 0,5 ?
3. Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est $e^{-0,4}$.
4. Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est, à 10^{-2} près, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?
5. On considère un lot de 10 robots fonctionnant de manière indépendante. Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un robot qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années.

Exercice 7:

On admet que la durée de vie (exprimée en années) d'un certain type de capteur de lumière peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ (strictement positif), c'est-à-dire que la probabilité que ce capteur tombe en panne avant l'année t (t positif) s'exprime par

$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}([0;t]) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx.$$

1. Restitution organisée de connaissances

Pré-requis :

a. $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$ (où A et B sont deux évènements tels que □$(A) \neq 0$) ;

b. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ où A est un évènement ;

c. □$([a\,;b]) = F(b) - F(a)$ (où a et b sont des nombres réels positifs tels que $a \leq b$).

Démontrer que, pour tout nombre réel positif s, on a : $\mathbb{P}_{[t;+\infty[}([t;t+s]) = \dfrac{F(t+s)-F(t)}{1-F(t)}$ et que $\mathbb{P}_{[t;+\infty[}([t;t+s])$ est indépendant du nombre réel t.

Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,2$.

2. Démontrer que la probabilité que le capteur ne tombe pas en panne au cours des deux premières années est égale à $e^{-0,4}$.
3. Sachant que le capteur n'est pas tombé en panne au cours des deux premières années, quelle est, arrondie au centième, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?
4. On considère un lot de 10 capteurs, fonctionnant de manière indépendante.

Dans cette question, les probabilités seront arrondies à la sixième décimale.

a. Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait exactement deux capteurs qui ne tombent pas en panne au cours des deux premières années.

b. Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un capteur qui ne tombe pas en panne au cours des deux premières années.

Exercice 8 :

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Une salle informatique d'un établissement scolaire est équipée de 25 ordinateurs dont 3 sont défectueux. Tous les ordinateurs ont la même probabilité d'être choisis. On choisit au hasard deux ordinateurs de cette salle.

Quelle est la probabilité que ces deux ordinateurs soient défectueux ?

Partie B

La durée de vie d'un ordinateur (c'est-à-dire la durée de fonctionnement avant la première panne), est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

Ainsi, pour tout réel t positif, la probabilité qu'un ordinateur ait une durée de vie inférieure à t années, notée $p(X \le t)$, est donnée par : $p(X \le t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$.

1. Déterminer λ sachant que $p(X > 5) = 0{,}4$.

2. Dans cette question on prendra $\lambda = 0{,}18$.

Sachant qu'un ordinateur n'a pas eu de panne au cours des 3 premières années, quelle est, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 5 ans ?

3. Dans cette question on admet que la durée de vie d'un ordinateur est indépendante de celle des autres et que $p(X > 5) = 0{,}4$.

a. On considère un lot de 10 ordinateurs. Quelle est la probabilité que, dans ce lot, l'un au moins des ordinateurs ait une durée de vie supérieure à 5 ans ? On donnera une valeur arrondie au millième de cette probabilité.

b. Quel nombre minimal d'ordinateurs doit-on choisir pour que la probabilité de l'évènement « l'un au moins d'entre eux a une durée de vie supérieure à 5 ans » soit supérieure à 0,999 ?

<u>Correction</u>

Partie A

Situation d'équiprobabilité où il y a $\binom{25}{2} = 300$ cas possibles et $\binom{3}{2} = 3$ cas favorables à l'événement E : « 2 ordinateurs sur les 3 choisis soient défectueux » d'où : $p(E) = \frac{3}{300} = \frac{1}{100} = 0{,}01$.

Partie B

Rappel : $p(X \le t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda x}$, $p(X > t) = e^{-\lambda t}$.

1. λ sachant que $p(X > 5) = 0{,}4 \Leftrightarrow e^{-5\lambda} = 0{,}4$ soit $-5\lambda = \ln 0{,}4 \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln 0{,}4}{-5} \approx 0{,}18$.

2. On cherche la probabilité suivante : $p_{X>3}(X > 5)$; or une loi exponentielle exprime un processus sans vieillissement, les trois premières années comptent pour du beurre : $p_{X>3}(X > 5) = p(X > 2) = e^{-2\lambda} \approx e^{-2\times 0{,}18} \approx 0{,}698$;

3. a. On est en présence d'un schéma de Bernoulli de paramètres n = 10 et p = 0,4 ; soit alors Y la variable aléatoire égale au nombre d'ordinateurs qui auront une durée de vie supérieure à 5 ans (sur les 10 choisis) : Y suit la loi binomiale B(10 ; 0,4) et $p(Y = k) = \binom{10}{k} \times 0{,}4^k \times 0{,}6^{10-k}$;

La probabilité cherchée est alors : $p(Y \ge 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - 0{,}6^{10} \approx 0{,}994$.

b. On est toujours en présence d'un schéma de Bernoulli de paramètres n (inconnu) et p = 0,4 ; soit alors Y la variable aléatoire égale au nombre d'ordinateurs qui auront une durée de vie supérieure à 5 ans (sur les n choisis) ; Y suit la loi binomiale B(n ; 0,4) et $p(Y = k) = \binom{n}{k} \times 0{,}4^k \times 0{,}6^{n-k}$.

L'événement « l'un au moins d'entre eux a une durée de vie supérieure à 5 ans » est l'événement $(Y \ge 1)$, sa probabilité est donc $p(Y \ge 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - 0{,}6^n$ et le problème revient alors à résoudre l'inéquation suivante : $1 - 0{,}6^n > 0{,}999 \Leftrightarrow 10^{-3} > 0{,}6^n \underset{\ln\ \text{croissante}}{\Leftrightarrow} \ln\left(10^{-3}\right) > \ln\left(0{,}6^n\right)$

$$\underset{\ln x^n = n\ln x \text{ si } x>0}{\Leftrightarrow} -3\ln 10 > n \ln 0{,}6 \underset{\ln x<0 \text{ si } 0<x<1}{\Leftrightarrow} n > \frac{-3\ln 10}{\ln 0{,}6} \Leftrightarrow n \ge 14 ;$$

Il faut donc choisir au minimum 14 ordinateurs pour que la probabilité de l'évènement « l'un au moins d'entre eux a une durée de vie supérieure à 5 ans » soit supérieure à 0,999.