PROFESSEUR : ANIS BEN ALI

Analyse (Recueil)

4ème MATHS 2018

EXERCICE N°1

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=xe^{1-x}$ et $g(x)=e^{1-x}$.On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ et on a représenté ci-dessous la courbe $\mathscr{C}'$ représentative de g.

1) a) Dresser le tableau de variations de f.
b) Etudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{C}'$.
c) Tracer $\mathscr{C}$ dans le même repère que celui de g.

2) Soit t un réel de $]1;+\infty[$, on désigne par D la partie du plan limitée par $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ et les droites d'équations $x=1$ et $x=t$.

a) Calculer en fonction de t l'aire $\mathscr{A}(t)$ de D.

b) Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathscr{A}(t)$.

3) Soit x un réel strictement supérieur à 1.Soient M et N deux points respectifs de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ayant pour abscisse x. Déterminer x pour que la distance MN soit maximale.

4) Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n=\int_1^2(x-1)^n.g(x)dx$.

a) Calculer U_1.

b) Montrer que la suite U est décroissante.

c) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*, U_{n+1}=-\frac{1}{e}+(n+1)U_n$.

d) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*, U_n\le\frac{1}{ne}$.Montrer alors que U est convergente et déterminer sa limite.

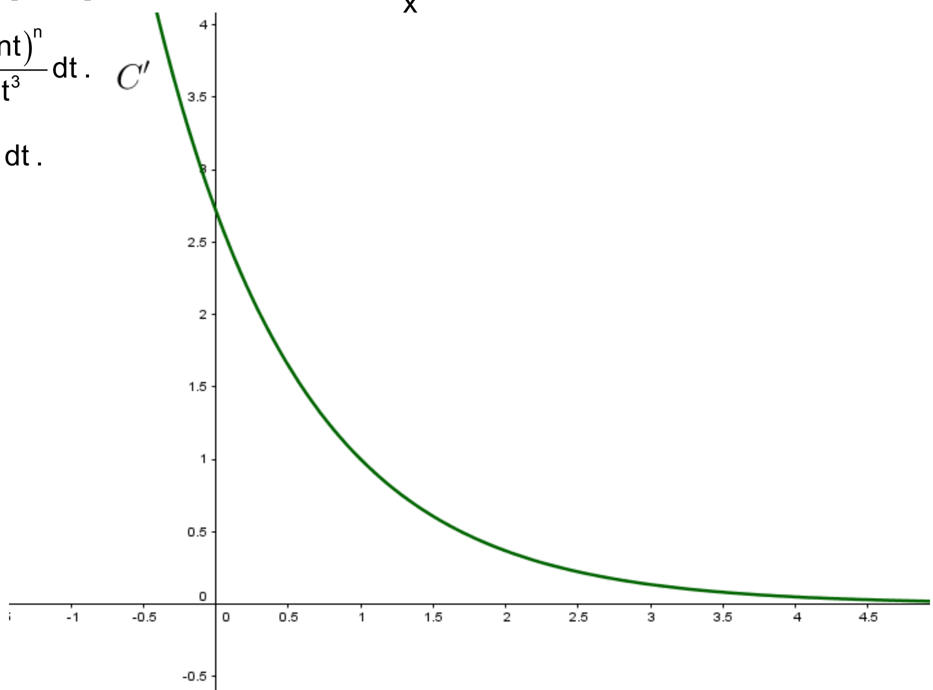
e) Soit h la fonction définie sur par $h(x)=(x-1)e^{\frac{1-x}{2}}$.On désigne par $\mathscr{C}_h$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé et (S) le solide de révolution obtenu par la rotation de $\mathscr{C}_h$ autour de l'axe des abscisses où $1\le x\le 2$.
Déterminer son volume V.

5) Soit F_n la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $F_n(x)=\int_1^{1+2\ln x}(t-1)^n g(t)dt$.

a) Montrer que F_n est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que $F'_n(x)=2^{1+n}.\frac{(\ln x)^n}{x^3}$.

b) En déduire que $F_n(x)=2^{1+n}\int_1^x\frac{(\ln t)^n}{t^3}dt$.

c) Calculer alors $F_n(x)=\int_1^{\sqrt{e}}\frac{(\ln t)^3}{t^3}dt$.



EXERCICE N°2

A/ Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x(1-x)}$

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et à gauche en 1.Interpréter les résultats graphiquement.
   b) Montrer que la droite $\Delta : x=\frac{1}{2}$ est un axe symétrique de $\mathcal{C}$.
   c) Etudier les variations de f puis tracer $\mathcal{C}$ (unité 4 cm)
   d) Soit g la fonction définie sur $[0, 1]$ par $g(x)=-f(x)$. Déduire de $\mathcal{C}$, la courbe $\mathcal{C}'$ de g dans le même repère.
2) Soit $\Gamma=\mathcal{C}\cup\mathcal{C}'$.
   a) Montrer que Γ est l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que $x^2-x+4y^2=0$.
   b) En déduire que Γ est une ellipse dont on déterminera le grand axe et les coordonnées de ses sommets et de ses foyers .
3) Soit F la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ par $F(x)=\int_0^{\frac{1+\sin x}{2}}\sqrt{t(1-t)}\,dt$.
   a) Montrer que F est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et calculer $F'(x)$.
   b) Vérifier que $\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], F(x)=\frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}(1+\cos 2t)\,dt$ puis calculer $F(x)$.
   c) Soit $\mathcal{A}$ l'aire de l'intérieur de l'ellipse Γ . Montrer que $\mathcal{A} = \frac{\pi}{8}u.a=2\pi\ cm^2$.

EXERCICE N°3

Partie A

On considère pour tout entier naturel non nul n la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x)=\frac{e^x}{(1+x)^n}$

On désigne par C_n sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a) Etudier les variations de f_n et dresser son tableau de variation
   b) Exprimer $f_n'(x)$ en fonction de $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$
2) a) Etudier les positions relatives de ζ_n et ζ_{n+1}
   b) Construire les courbes ζ_1 et ζ_2 dans le même repère
3) Pour tout entier naturel non nul n, on pose $I_n=\int_0^1 f_n(x)dx$
   a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et qu'elle est convergente
   b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $I_n=nI_{n+1}-1+\frac{e}{2^n}$
   c) Calculer l'aire de la partie $\mathfrak{D}$ délimitée par ζ_1 et ζ_2 et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$
   d) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, $I_n\le\frac{e}{n-1}$
   e) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

Partie B

Soit F la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $F(x)=\int_0^{2\ln x}\frac{e^t}{1+t}dt$

1) a) Vérifier que pour tout $t\in[0;+\infty[$, on a $e^t\geq 1+t$ et que $F(x)\geq \ln x$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

2) a) Montrer que F est dérivable sur $[1;+\infty[$ et calculer $F'(x)$

b) En déduire que pour tout $x\in[1;+\infty[$ on a $F(x)=\int_1^x\frac{2t}{1+2\ln t}dt$

3) a) Montrer que pour tout $x\in[2;+\infty[$ on a $F(x)\geq\int_{\frac{x}{2}}^x\frac{2t}{1+2\ln t}dt$

b) En utilisant le théorème de la moyenne, montrer qu'il existe un réel $c\in\left[\frac{x}{2};x\right]$ telle que $F(x)\geq\frac{xc}{1+2\ln c}$

c) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$

4) On désigne par Γ la courbe représentative de F dans un repère orthonormé

a) Etudier les variations de la fonction φ définie $[1;+\infty[$ par $\varphi(x)=\frac{2x}{1+2\ln x}$

b) En déduire que Γ possède un point d'inflexion I_0 d'abscisse $x_0=\sqrt{e}$

c) Donner une équation de la tangente T_0 à Γ en I_0

d) Tracer T_0 et donner l'allure de Γ

EXERCICE N°4

Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par : $\boldsymbol{f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-\frac{2}{x}}$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

I) 1°) a) Montrer que : $f'(x)=\frac{-2}{x^2-1}$

b) Etudier les variations de f et montrer que $f(x)>0$ $pour\ tout\ x>1$

c) Tracer C_f

2°) Soit $\alpha\in]1,2[$ calculer l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan limité par la courbe C_f et les droites d'équations : $y=0$; $x=\alpha$ et $x=2$

3°) calculer la limite de $A(\alpha)$ quand α tend vers 1

4°) Soit $n\in IN^*/\{1\}$ soit l'équation différentielle : E_n: $ny'-y=\frac{1}{n+1}(x+1)$

a) Résoudre l'équation différentielle (F): $ny'-y=0$

b) Déterminer les réels a et b tel que : $h: x\to h(x)=ax+b$ est solution de E_n.

c) Montrer que g est solution de E_n si et seulement si $g-h$ est solution de E_n.

d) Donner la solution g tel que : $g(n)=e-1-\frac{n}{n+1}$

II) Soit $f_n(x)=x-n\ln\left(1+\frac{x}{n+1}\right)$, $x\in]-n-1;+\infty[$

1°) Dresser le tableau de variation de f_n et montrer que $f_n(-2)=nf(n)$

2°) Montrer que l'équation : $f_n(x)=0$ admet dans $[-2,-1]$ une unique solution α_n.

Montrer que $g(\alpha_n)=0$.

EXERCICE N°5

A/ Soit F la fonction définie sur $[0;1]$ par : $F(1)=\ln 2$ et $F(x)=\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$ si $x\neq 1$.

1) Soit f la fonction définie sur $[0;1[$ par : $f(0)=0$ et $f(x)=\frac{1}{\ln x}$ pour $x>0$.

   Montrer que f est continue sur $[0;1[$.

2) Etudier le signe de F(x) pour x de $]0;1[$.

3) Montrer que F est dérivable sur $[0;1[$ et calculer $F'(x)$ pour tout x de $[0;1[$.

   (On pourra écrire F à l'aide de φ où φ est la primitive de f sur $[0;1[$ qui s'annule en 0.)

4) a) Vérifier que $\ln 2=\int_x^{x^2}\frac{dt}{t\ln t}$ où $x\in\,]0;1[$.

   b) Montrer que pour tout x de $]0;1[$,il existe un réel c de l'intervalle $\left[x^2;x\right]$ tel que :

   $F(x)-F(1)=\left(x^2-x\right)\frac{c-1}{c\ln c}$.

   c) Montrer que F est dérivable à gauche en 1 et préciser $F_g'(1)$.

B/ 1) Pour tout t de $]0;1]$,on pose $u(t)=t\ln t-t+1$.Etudier les variations de u puis déduire son signe sur $]0;1]$.

2) Soit g la fonction définie sur $[0;1]$ par $g(1)=1$, $g(0)=0$ et $g(x)=\frac{x-1}{\ln x}$ pour x de $]0;1[$.

   a) Etudier la continuité de g à droite en 0.

   b) On admettra que g est dérivable à droite en 1 et que $g_g'(1)=\frac{1}{2}$. Montrer que pour tout x de $]0;1[$,le signe de g'(x) est celui de u(x) puis donner le tableau de variations de g.

   c) Tracer la courbe (C) représentative de g.

   d) Soit, en unité d'aire, A de la partie du plan limitée par (C),les axes du repère et x=1.

   Montrer que $A=\ln 2$

EXERCICE N°6

Répondre, par **VRAI** ou **FAUX**, aux affirmations suivantes en justifiant votre réponse.

Soit la fonction f dont une représentation graphique (C) est donnée ci-dessous.

Soit F la fonction définie sur $I=[0;+\infty[$ par $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

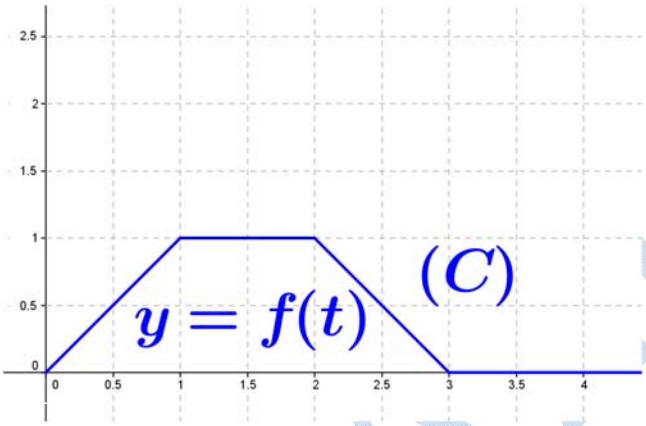
a) F n'est pas dérivable en 1,2 et 3.

b) F est décroissante sur I.

c) Si $x\in[0;1]$ alors $F(x)=\frac{1}{2}x^2$.

d) Si $x\in[1;2]$ alors $F(x)=x-\frac{1}{2}$.

e) Si $x\geq 3$ alors $F(x)=3$.



EXERCICE N°7

A/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-x^2}$

Etudier les variations de f puis tracer sa courbe C dans un repère orthonormé

B/ Soit la suite (A_n) définie sur $\mathbb{N}$ par A_n l'aire en unité d'aire de la partie du plan limitée par C l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=n$ et $x=n+1$

1) Ecrire A_n à l'aide d'une intégrale

2) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $f(n+1)\leq A_n\leq f(n)$. Montrer donc les deux assertions suivantes : La suite (A_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n=0$

3) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n=\sum_{k=0}^{n-1} A_k$

   a) Prouver que (S_n) est croissante. Justifier que $S_n=\int_0^n f(x)dx$ puis interpréter géométriquement S_n

   b) Prouver que $\forall x\geq 2\,;\, f(x)\leq e^{-2x}$; en déduire que $\forall n\in\mathbb{N}^*/\{1;2\};\, S_n\leq S_2+\frac{1}{2}e^{-4}-\frac{1}{2}e^{-2n}$

   c) Conclure que (S_n) est convergente

C/ Soit $n\in\mathbb{N}$, on pose $F_n(x)=\int_0^x t^{2n+1}f(t)dt$ pour tout $x\geq 0$

1) Calculer $F_0(x)$ et déterminer $v_0=\lim\limits_{x\to+\infty} F_0(x)$

2) Vérifier que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{2n+2}e^{-x^2}}{2}=0\,;\,\forall n\in\mathbb{N}$

3) Montrer à l'aide d'une intégration par partie que $F_{n+1}(x)=\frac{x^{2n+2}e^{-x^2}}{2}+(n+1)F_n(x)$

4) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}\,;\, F_n$ possède une limite finie non nul qu'on notera v_n et que $v_n=\frac{n!}{2}$

5) Calculer $G_n'(x)$ avec $G_n(x)=\frac{1}{2}\int_0^{x^2} t^n e^{-t}dt\,;\,\forall x\in\mathbb{R}$ puis déduire que $F_n(x)=G_n(x);\,\forall x\in\mathbb{R}$

6) Soit $H_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k F_k(x);\,\forall x\geq 0$

a) A l'aide de **C/** 5); montrer que $H_n(x)=\int_0^{x^2}\frac{e^{-t}\left[1-(-t)^{n+1}\right]}{2(1+t)}dt$; $\forall x\geq 0$

b) Montrer que $\left|H_n(x)-\int_0^{x^2}\frac{e^{-t}}{2(1+t)}dt\right|\leq\int_0^{x^2}\frac{e^{-t}t^{n+1}}{2(1+t)}dt$, en déduire

$\forall x\in[0,1]$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[H_n(x)\right]=\int_0^{x^2}\frac{e^{-t}}{2(1+t)}dt$

EXERCICE N°8

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\frac{2e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$.

   b) Dresser le tableau de variation de f.

   c) Montrer que l'équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0 a pour équation $y=\frac{1}{2}x$.

2. a) Montrer que pour tout $t\in\mathbb{R}$, $f'(t)\leq\frac{1}{2}$

   b) En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)\leq\frac{1}{2}x$.

   c) Déterminer alors la position relative de (C) et T.
3. Tracer (C) et T.
4. Soit (S) le solide de révolution obtenu en faisant tourner la portion de la courbe (C) sur $[0,\ln 2]$ autour de l'axe des abscisses. On se propose de calculer le volume $\mathcal{V}$ de ce solide.
   a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f^2(x)=1-2f'(x)$.

   b) Calculer $\mathcal{V}$.

EXERCICE N°9

Soit *f* la fonction définie su $]0,+\infty[$ par $f(x)=\int_1^x\frac{\cos^2 t}{t}\,dt$.

Répondre par **vrai** ou **faux** à chacune des affirmations suivantes, **en justifiant la réponse**.

1°) Pour tout $x>0$, $f'(x)\geq 0$.

2°) Pour tout $x>0$, $f(x)\geq 0$.

3°) $f(2)\leq\ln 2$.

EXERCICE N°10

Soit la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{x} & \text{si } x>0 \\ f(0)=2 \end{cases}$.

1) Montrer que f est continue à droite de 0.

2) Pour tout $x\in]0,+\infty[$, on pose : $I(x)=\int_0^x \dfrac{e^t(x-t)^2}{2}\,dt$.

a. Sans calculer I(x), montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, on a : $0\le I(x)\le \dfrac{x^3}{6}e^x$. En déduire $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{I(x)}{x^2}$.

b. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}+I(x)$. En déduire $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$.

c. Montrer que f est dérivable à droite en 0 et que : $f'_d(0)=2$.

3) Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x)=(x-1)e^x+1$

a. Etudier les variations de g

b. En déduire le signe de g(x) pour tout $x\in[0,+\infty[$.

4) a. Exprimer f'(x) en fonction de g(x) pour tout $x\in]0,+\infty[$ puis dresser le tableau de variation de f.

b. Construire la courbe de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

5) Soit F la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $F(x)=\int_0^{\ln x} f(t)\,dt$

a. Justifier que F(x) existe pour tout $x\in[1,+\infty[$.

b. Montrer que F est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que pour tout $x>1$, $F'(x)=\dfrac{x^2-1}{x\ln x}$.

6) On pose $h(x)=\dfrac{F(x)-F(1)}{x-1}$ pour $x>1$, montrer que $h(x)=\dfrac{1}{x-1}\int_0^{\ln x} f(t)\,dt$

b) Montrer qu'il existe un réel $c\in[0,\ln x]$ tel que $h(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}f(c)$

c) En déduire que F est dérivable à droite en 1

d) Montrer que F' est continue à droite en 1

e) Justifier que : $\forall x\in[e,+\infty[$, on a : $F(x)\ge\int_1^{\ln x}\dfrac{2t-1}{t}\,dt$. Déterminer alors $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$

EXERCICE N°11

1) a) Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $x\in[0;1]$, on a :

$$\frac{1}{n}-\frac{x}{n^2}\le\frac{1}{x+n}\le\frac{1}{n}.$$

b) Déduire que $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2n^2}\le\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)\le\dfrac{1}{n}$.

2) Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\ln(n)$. Montrer que U est décroissante.

3) Soit V la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $V_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\ln(n+1)$. Montrer que V est croissante.

4) Démontrer que U et V convergent vers une limite commune α dont on donnera un encadrement

EXERCICE N°12

Pour tout $x \in]1,+\infty[$ on pose $f_n(x) = \ln(x-1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$ où n est entier naturel tel que $n \geq 2$.

1) Dresser le tableau de variation de f_n .
2) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution (α_n) .
3) a) Montrer que : $f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{(\alpha_n)^{n+1}}{n+1}$.

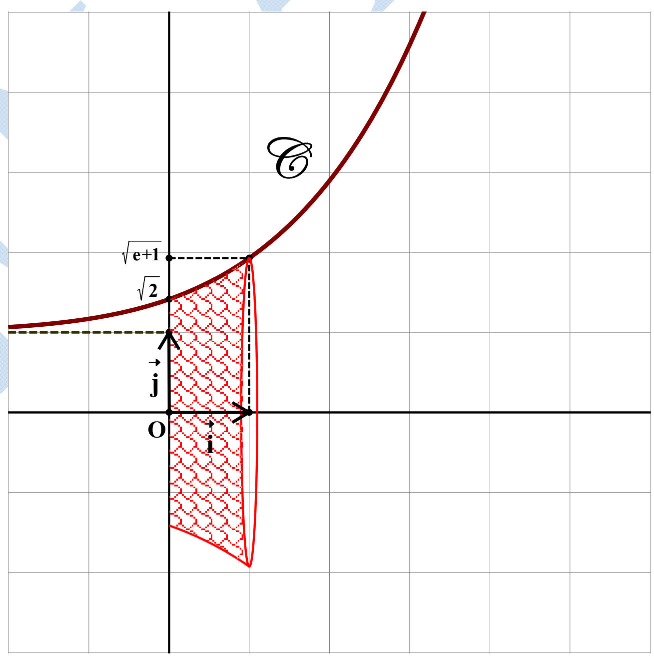
   b) En déduire la monotonie de la suite (α_n) .

   c) En déduire que la suite (α_n) est convergente.

EXERCICE N°13

Dans l'annexe ci-jointe, on a représenté dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que pour tout réel x, $\boxed{2f'(x)f(x) - (f(x))^2 + 1 = 0}$.

$\mathscr{C}$ admet une asymptote d'équation $y = 1$ au voisinage de $-\infty$ et une branche parabolique de direction celle de l'axe $(O,\vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.



1) Par une lecture graphique :

   a) Donner $f(0)$, $f(1)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

   b) Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I qu'on précisera

   c) Tracer dans le même repère la courbe $\mathscr{C}'$ représentative de f^{-1} la fonction réciproque de f

2) Soit $\mathscr{V}$ le volume du solide engendré par la rotation de l'arc $\Gamma = \{M(x,y) \in \mathscr{C} \ ; 0 \leq x \leq 1\}$ autour de l'axe des abscisses. Montrer que $\mathscr{V} = \pi e$
3) Soit g la fonction définie par $g(x) = (f(x))^2$

   a) Montrer que g vérifie l'équation différentielle $(E) : y' = y - 1$

   b) Résoudre l'équation (E) et déduire l'expression de $g(x)$.

   c) Expliciter alors $f(x)$ puis $f^{-1}(x)$.

EXERCICE N°14

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2^{-x}.\ln(1+2^x)$.

1) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

2) a) Montrer que pour tout t>0, $\frac{\ln(1+t)}{t} > \frac{1}{1+t}$.

   b) Dresser le tableau de variations de f.

   c) Tracer C_f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

3) Déterminer l'aire de la partie du plan limitée par C_f , les axes du repère et la droite x = 1.

EXERCICE N°15

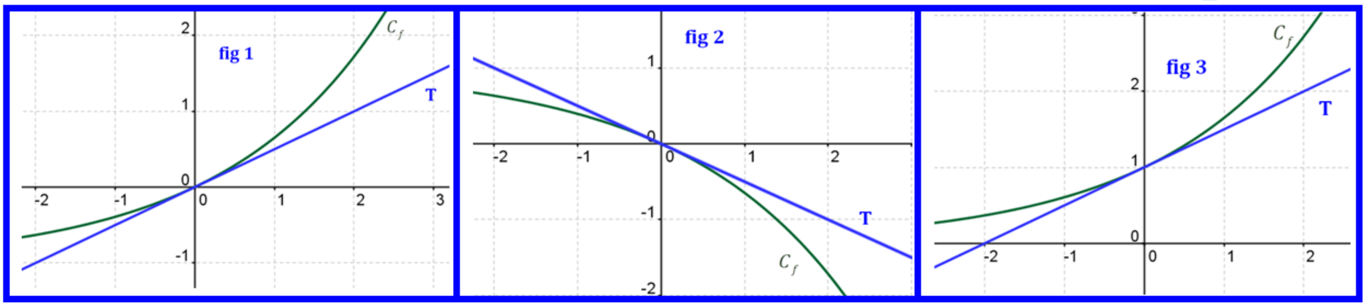
1°) Soit $f(x)=2^x$ pour tout réel x, f est une solution de l'une des équations différentielles suivantes. Laquelle ?

a) $\ln 2.y'-y=0$ **b)** $y'=y+\ln 2$ **c)** $-y'+\ln 2.y=0$

2°) on considère les intégrales : $I_1=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\ln x}{x-2}dx$; $I_2=\int_{\pi}^{0}|x.\sin x|dx$ et $I_3=\int_{-1}^{0}xe^x dx$.

a) $I_1\geq 0$. **b)** $I_2\geq 0$. **c)** $I_3\geq 0$.

3°) Soit l'équation différentielle $(E):2y'-y=1$. On a représenté ci-dessous une partie de la courbe d'une solution f de (E) et de sa tangente au point d'abscisse 0. Lequel des graphiques correspond à f ?



EXERCICE N°16

Dans l'annexe ci-joint (***Le graphique 1***), on a représenté dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ une partie de la courbe C d'une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ ainsi que son asymptote Δ au voisinage de $-\infty$.

1) On admet que φ (**la restriction de f sur** $\mathbb{R}_-$) est dérivable sur $\mathbb{R}_-$ et que pour tout $x\leq 0$, on a :

$$\boxed{\varphi'(x)=1-(\varphi(x))^2}$$

2)

a) Calculer le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de l'arc :
$\Gamma=\{M(x,y)\text{ tels que } y=\varphi(x) \text{ et } -1\leq x\leq 0\}$ autour de l'axe des abscisses

b) Justifier graphiquement que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}_-$ sur $I=]-1,0]$

c) Montrer que φ^{-1} (**la fonc. réciproque de** φ) est dérivable sur I et que pour tout $x\in I$, $\boxed{(\varphi^{-1})'(x)=\frac{1}{1-x^2}}$

d) En déduire que pour tout $x\in I$, $\boxed{\varphi^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$. Expliciter alors $f(x)$ pour tout $x\leq 0$

3) On considère l'équation différentielle (E) : $\boxed{2+y'=2e^{-y}}$ et g la solution de (E) telle que $g(0)=\ln 2$

On pose pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\boxed{h(x)=e^{g(x)}-2}$

a) Montrer que h est une solution de l'équation (E') : $\boxed{z'=-2z-2}$

b) Résoudre l'équation (E') et déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\boxed{g(x)=\ln\left(1+e^{-2x}\right)}$

4) On admet que pour tout $x\geq 0$, $\boxed{f(x)=\ln\left(\frac{e^{2x}+1}{2}\right)}$

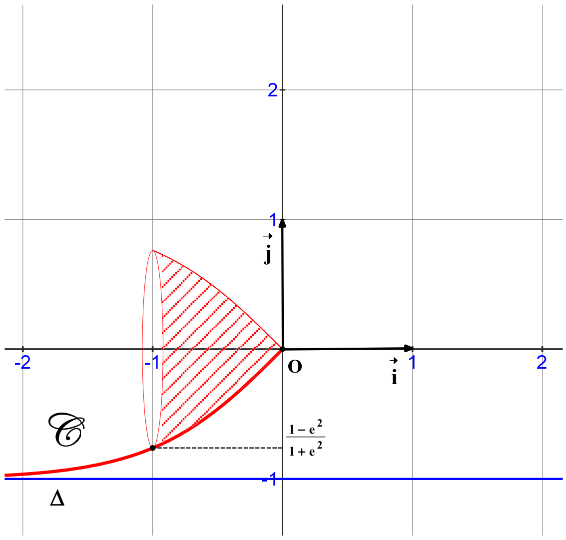
a) Montrer que f est dérivable en 0 puis donner une équation de la tangente T à C en O.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$

c) Montrer que pour tout $x\geq 0$, $\boxed{f(x)=2x-\ln 2+g(x)}$, en déduire que C admet une asymptote oblique Δ' au voisinage de $+\infty$. Etudier la position de C par rapport à Δ' sur $\mathbb{R}_+$.

d) Tracer T et Δ' puis compléter la courbe $\mathcal{C}$ (**sur *le graphique 1***).

Le graphique 1



EXERCICE N°17

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$.

1) Montrer que le point $I\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie pour la courbe C_f .

2) On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^n f(x+\ln n)\,dx$.

   a) Interpréter graphiquement u_1 .

   b) Vérifier que $f(x+\ln n)=\dfrac{ne^x}{1+ne^x}$.

   c) Déterminer u_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.