Chapitre : 1	Cours : Continuité et limites	Prof : Mr Gary Badreddine
4ème Année : section-sciences-expérimentales	Lycée : El Montazeh El Mourouj 2	Année scolaire : 2018 / 2019

I. Rappels

1. Continuité et limite en un réel

a. Notion et vocabulaire

Si $f(x)$ tend vers L lorsque x tend vers a . On écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ ou $\lim\limits_{a} f = L$ et on dit que f admet pour limite L en a .

b. Théorème

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^p} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \ (p \in \mathbb{N}^*).$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^p} = 0 \ (p \in \mathbb{N}^*).$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = \lim_{x \to +\infty} x^p = +\infty \ (p \in \mathbb{N}^*).$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^p = \begin{cases} +\infty & Si \ (p \in \mathbb{N}^* \ est\ pair) \\ -\infty & Si \ (p \in \mathbb{N}^* \ est\ impair) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty \ , \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \ , \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \ .$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n \ .$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0}{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n}{a_m x^m} \ .$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{x}=a \quad avec\ a\in\mathbb{R}^* \quad .$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}=0 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2} \quad ,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(ax)}{x}=0 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(ax)}{x^2}=\frac{a^2}{2} \quad ,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=1 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan(ax)}{x}=a \quad avec\ a\in\mathbb{R}^*$$

- Si f une fonction définie sur intervalle ouvert I , sauf peut –être en un réel a de I et admettant pour limite L en a

  Si $f(x)$ est positif pour tout réel x distinct de a , alors $\lim_{a}\sqrt{f}=\sqrt{l}$.

- Soit f une fonction positive , a fini ou infini et L un réel .

  $Si\ \lim_{a} f=L\ \ alors\ \ \lim_{a}\sqrt{f}=\sqrt{l}\ .Si\ \lim_{a} f=+\infty\ alors\ \ \lim_{a}\sqrt{f}=+\infty$

- Pour tout réel a et tout entier naturel n non nul ,

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x-a}=+\infty \ ;\ \lim_{x\to+\infty}(x-a)^n=+\infty \ ;\ \lim_{x\to-\infty}\sqrt{a-x}=+\infty \ ;$$
$$\lim_{x\to-\infty}(x-a)^{2n}=+\infty \ ;\ \lim_{x\to-\infty}(x-a)^{2n-1}=+\infty \ .$$

$$Si\ \lim_{+\infty} f=+\infty\ \ alors\ \ \lim_{+\infty}\frac{1}{f}=0\,.$$
$$Si\ \lim_{-\infty} f=+\infty\ \ alors\ \ \lim_{-\infty}\frac{1}{f}=0\,.$$
$$Si\ \lim_{+\infty} f=-\infty\ \ alors\ \ \lim_{+\infty}\frac{1}{f}=0\,.$$
$$Si\ \lim_{-\infty} f=-\infty\ \ alors\ \ \lim_{-\infty}\frac{1}{f}=0\,.$$

- Pour tout réel a et tout entier naturel n non nul ,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x-a}}=0 \ ;\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{a-x}}=0 \ ;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(x-a)^n}=0 \ ;\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{(x-a)^n}=0\,.$$
$$\lim_{x\to a}\frac{1}{(x-a)^{2n}}=+\infty \ ;\ \lim_{x\to a^-}\frac{1}{(x-a)^{2n-1}}=-\infty \ ;\ \lim_{x\to a^+}\frac{1}{(x-a)^{2n-1}}=+\infty$$

c. Retenons Page 6

- Toute fonction polynôme est continue en tout réel **.**
- Toute fonction rationnelle est continue en tout réel de son ensemble de définition .
- Les fonctions $x\mapsto\cos(x)$ et $x\mapsto\sin(x)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- *La fonction* $x\mapsto\tan(x)$ *est continue sur* $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

- *La fonction $x \mapsto cotan(x)$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{ k\pi , k \in \mathbb{Z}\}$.*

d. Activité 1 Page 6

Dans chacun des cas suivants déterminer l'ensemble de définition de la fonction f et justifier la continuité de f en tout réel de son ensemble de définition .

$f: \mapsto 1 - x + x^2.$

$f: \mapsto \left|\frac{-5x+1}{x^2+4}\right|.$

$f: \mapsto x - \frac{1}{x-1}$.

$f: \mapsto \frac{1}{(x+1)(x+2)}$.

$$f : \mapsto \frac{x+1}{(x^2+2x+3)}.$$

e. Théorème Page 6

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et a un réel de I .

- Si f et g sont continues en a , alors les fonctions $f+g$ et $f\times g$ sont continues en a .
- Si f est continue en a , alors les fonctions αf $(\alpha \in \mathbb{R})$, $|f|$ et f^n $(n \in \mathbb{N}^*)$ sont continues en a .
- Si f est continue en a et $f(a) \neq 0$, alors les fonctions $\frac{1}{f}$ et $\frac{1}{f^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ sont continues en a .
- Si f et g sont continues en a et $g(a) \neq 0$, alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en a .
- Si f est positive sur I et f est continue en a , alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en a .

f. Activité 2 Page 6

Soit la fonction $f : \mapsto \frac{2x^2-4x+2}{|x-1|}$.

1. Vérifier que pour tout réel $x \neq 1$, $f(x) = 2|x-1|$.

2. En déduire $\lim_{x \to 1} f(x)$.

g. **Théorème page 6**

Soit f une fonction définie sur intervalle ouvert I ,sauf peut -être en un réel a de I.S'il existe une fonction g définie sur I, continue en a et telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \neq a$ alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = g(a).$$

h. **Activité 3 Page 7**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x + \frac{\sin(2x)}{x}$.

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et déterminer son prolongement.

i. **Théorème page 7**

Soit f la fonction définie sur un intervalle ouvert I , sauf en un réel a de I.

Si la fonction f admet une limite finie L lorsque x tend vers a .alors la fonction g définie sur I par : $g(x) = \begin{cases} f(x) & si \ x \neq a \\ L & si \ x = a \end{cases}$ est continue en a .

j. **Retenons Page 7**

Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est continue en unréel a de I , si et seulement si :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

k. **Activité 4 Page 7**

Soit f la fonction définie par :$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & si \ x \leq 1 \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{2x} & si \ x > 1 \end{cases}$.

1. $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ et $\lim_{x \to 1^+} f(x)$.

2. La fonction f est –elle continue en 1 ?

l. **Activité 5 Page 7**

Soit f la fonction f: $\mapsto \frac{|x+1|}{x+1}$

La fonction f admet $-$ elle une limite en -1 ?

3. Continuité sur un intervalle

a. Retenons Page 7

- Une fonction est continue sur intervalle ouvert I si elle est continue en tout réel de I.
- Une fonction est continue sur un intervalle $[a, b]$ si elle continue sur $]a, b[$, à droite en a et à gauche en b .
  De facon analogue , on définit la continuité de f sur les intervalles $[a, b[$,$]a, b]$, $[a, +\infty[$ et $]-\infty, a]$.

b. Activité 6 Page 7

Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(3x)}{x} & si\ x \in]0, \pi] , \\ 3 \ \ si\ x = 0 \ . \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $[0, \pi]$.

4. Opération sur les limites

Soit L et L' deux réels .

Les résultats qui suivent concernent les opérations sur les limites en un réel ou à l'infini.

$Lim\ f$	$Lim\ g$	$Lim\ (f+g)$
L	L'	$L+L'$
L	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	L'	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

$Lim\ f$	$Lim\ g$	$Lim\ (f\times g)$
L	L'	$L\times L'$
$+\infty$	$L'>0$	$+\infty$
$+\infty$	$L'<0$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$Lim\ f$	$Lim\ g$	$\lim \frac{f}{g}$
L	$L' \neq 0$	$\frac{L}{L'}$
$+\infty$	$L'>0$	$+\infty$

$+\infty$	$L' < 0$	$-\infty$
L	$+\infty$	0
L	$-\infty$	0
$\boldsymbol{L \neq 0}$	0	∞ (on applique la règle des signes)

$Lim\ f$	$Lim\ \lvert f \rvert$	$Lim\ \sqrt{f}$
$\boldsymbol{L}$	$\lvert L \rvert$	$\sqrt{L}$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

5. Activité 7 Page 8

Déterminer les limites ci-dessous.

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x + \dfrac{1}{x^2+1}$.

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{-5x+1} - 3x.$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^2 - x)^2 + \sqrt{2}\, x$.

4. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{|x-2|^3} - \dfrac{1}{|x-2|}$.

5. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3}{(x-3)^2} - 2$

6. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 1}$

7. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} - x$

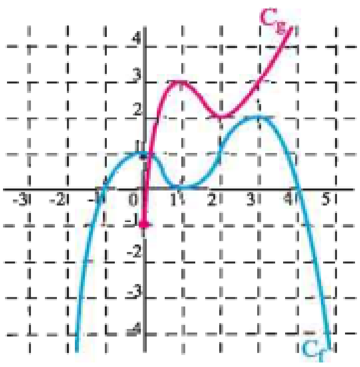
II. Continuité et limite d'une fonction composée

1. Composée de deux fonctions

a. Activité Page 9

Dans la figure ci –contre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$.

1. Lire sur le graphique les images par f des réels -1 ,0,1,2 et 3, ainsi que les images par g des réels 0,1,2 et 3.



2. Soit les fonctions $h :\mapsto g(f(x))$ et $k :\mapsto f(g(x))$.
   a. Déterminer les images par h des réels-1 ,0,1,2 et 3 .

   b. Déterminer les images par k des réels 0,1,2 et 3.

b. **Définition Page 9**

Soit u une fonction définie sur un ensemble I et v une fonction définie sur un ensemble J tel que $u(I)$ est inclus dans J.

La fonction notée $v \circ u$, définie sur I par $v \circ u(x) = v(u(x))$ est appelée fonction composée de u et v .

c. **Activité 2 Page 9**

Dans chacun des cas suivants , déterminer deux fonctions u et v telles que $f = v \circ u$.

1. $f : \mapsto \cos(\pi x + 1)$.

2. $f : \mapsto \frac{1+\cos(x)}{2+\cos(x)}$

3. $f : \mapsto \sin(\frac{x+x^4}{x^2+1})$

2. Continuité d'une fonction composée

a. **Théorème (admis) 9**

Soit u une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel a et v une fonction définie sur un ensemble J contenant le réel $u(a)$.
Si u est continue en a et v est continue en $u(a)$, alors la fonction $v \text{ o } u$ est continue en a .

b. **Corollaire Page 9**

La composée de deux fonctions continues est continue.

c. **Activité 2 Page 9**

Étudier dans chaque cas la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

1. $f: \mapsto \sin\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right)$.

2. $f: \mapsto \cos(\sin(x))$.

3. Continuité d'une fonction composée

a. **Théorème (admis) Page 10**

Soit u et v deux fonctions .Soit a, b et c finis ou infinis.

$Si \lim\limits_{x \to a} u(x) = b \quad et \quad \lim\limits_{x \to b} v(x) = c \quad alors \quad \lim\limits_{x \to a} v \text{ o } u(x) = c$

b. **Activité 4 Page 10**

Déterminer dans chaque cas la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a .

1. $f: \mapsto \tan\frac{x^2}{4}$, $a = \sqrt{\pi}$.

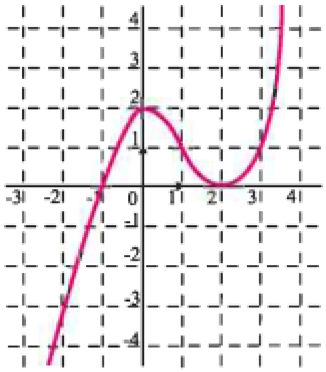
2. $f : \mapsto \frac{cosx^{2}-1}{x^{2}}$, $a = 0$.

3. $f : \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{x-1}\right)$, $a = 2$.

c. **Activité 5 Page 10**

Dans la figure ci –contre est représentée une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer :



$\lim\limits_{x \to 2} f\left(\frac{2}{x}\right) =$

$\lim\limits_{x \to 4} f\left(\frac{x-4}{x}\right) =$

$\lim\limits_{x \to 0} f(\sin(x) - 1) =$

d. Exercice résolu Page 10

Soit la fonction $f: \mapsto \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x^2}$. Déterminer :
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

e. Activité 6 Page 10

Déterminer : $\lim\limits_{x \to 1^+} \tan\left(\frac{\pi}{2x}\right)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x-1} sin\left(\frac{\pi x}{2x-1}\right)$

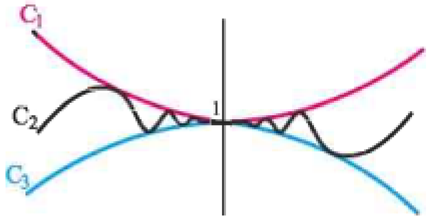
III. Limites et ordre

1. Activité 1 Page 10

Soit f , g et h les fonctions définies par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 1$,
$g(x) = -x^2 + 1$ et $h(x) = x^2 + 1$.

1. Montrer que pour tout réel non nul x , $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.

2. Dans la figure ci contre on a représenté les trois fonctions f , g et h.
   a. Identifier la courbe de chacune de ces fonctions .



b. Que peut-on conjecturer sur la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 ?

2. Théorème (admis) Page 11

Soit f, u et v trois fonctions définies sur un intervalle I sauf peut-être en un réel a de I.
Soit deux réels ℓ et ℓ'.

- Si $u(x) \leq v(x)$ pour tout $x \neq a$ et si $\lim\limits_{a} u = \ell$ et $\lim\limits_{a} v = \ell'$, alors $\ell \leq \ell'$.
- Si $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ pour tout $x \neq a$ et si $\lim\limits_{a} u = \lim\limits_{a} v = \ell$, alors $\lim\limits_{a} f = \ell$.
- Si $v(x) \geq u(x)$ pour tout $x \neq a$ et si $\lim\limits_{a} u = +\infty$, alors $\lim\limits_{a} v = +\infty$.
- Si $v(x) \leq u(x)$ pour tout $x \neq a$ et si $\lim\limits_{a} u = -\infty$, alors $\lim\limits_{a} v = -\infty$.

Les résultats énoncés ci-dessus restent valables lorsque l'on considère des limites à l'infini, à droite en a ou à gauche en a.

3. Exercice résolu 2 Page 10

Soit la fonction $f\colon \mapsto \frac{cos^2 x+1}{x}$.

$Déterminer \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\ et \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

4. Activité 3 Page 12

Soit la fonction $f: \mapsto \frac{1}{x^2} + sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Montrer que $f(x) \geq \frac{1}{x^2}$, $x \in \mathbb{R}^*$.

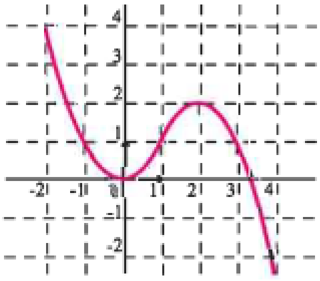
2. Étudier la limite de f en 0.

IV. Image d'un intervalle par une fonction continue

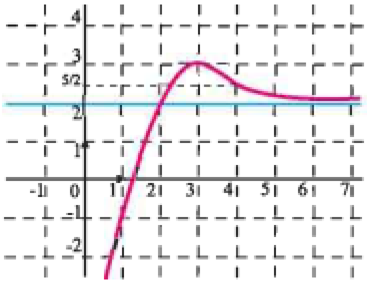
1. Théorème des valeurs intermédiaires

a. **Activité 1 Page 12**

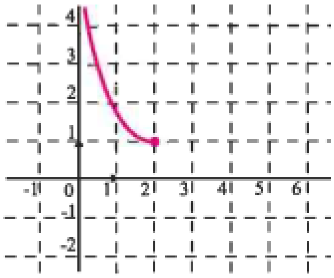
Dans chacun des cas suivants, déterminer graphiquement l'image $f(I)$ de l'intervalle I.



$I=]-1,3[$



$I=[1,4]$



$I=]0,2]$

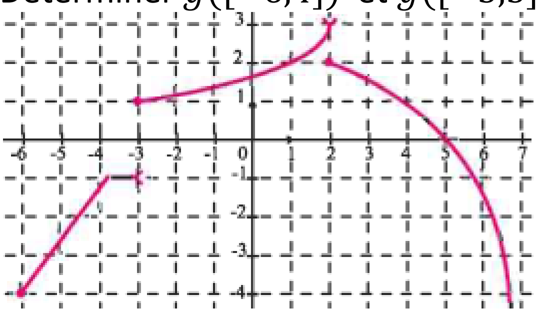
b. **Théorème (Rappel) Page 12**

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

c. **Activité 2 Page 12**

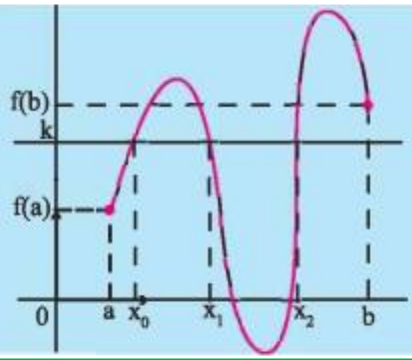
Le graphique ci –contre représente une fonction g définie sur $[-6,+\infty[$.

Déterminer $g([-6,4])$ et $g([-3,5])$.



d. **Théorème des valeurs intermédiaires (Rappel) Page 12**

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = k$ possède au moins une solution dans l'intervalle $[a, b]$.
En particulier, si $f(a).f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a, b[$.



e. Retenons Page 13

- Une fonction f est strictement croissante sur un intervalle I si pour tous réels a et b de I tels que $a < b$, $f(a) < f(b)$.
- Une fonction f est strictement décroissante sur un intervalle I si pour tous réels a et b de I tels que $a > b$, $f(a) > f(b)$.
- Une fonction est strictement monotone sur un intervalle I , si elle est strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I.

f. Activité 3 Page 13

Montrer que les fonctions ci –dessous sont strictement monotones sur I.

$f: \mapsto x^2$, $I = \mathbb{R}+$

$f: \mapsto \frac{x+2}{x+1}$, $I =]-1, +\infty[$

$f: \mapsto (1+x)^{20}$, $I = [0,4]$

g. Théorème Page 13

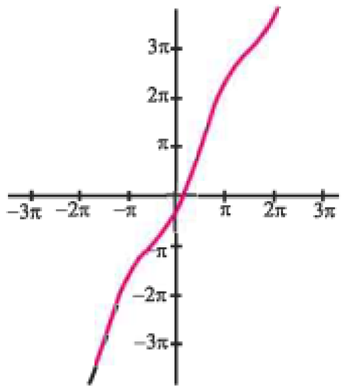
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.
Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$. Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$**.**

h. Activité 4 Page 13

Le graphique ci –contre représente la fonction f: $\mapsto 2x - \cos(x)$.

1. Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

2. a. Montrer que f est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.



b. Montre que l'équation $f(x) = \frac{\pi}{6}$ admet une solution unique α dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

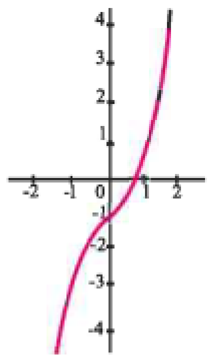
3. a. Lequel des intervalles $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ et $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ contient la solution α ?

b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude $\frac{\pi}{8}$.

i. **Activité 5 Page 13**

La courbe représentée ci-contre est celle de la fonction $f: \mapsto x^3 + x - 1$

1. Donner l'ensemble de définition de f.



2. Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0,1]$.

4. On se propose de trouver un encadrement de plus en plus précis de α en deux intervalles de même amplitude.(ce procédé est appelé « méthode de dichotomie »).
   a. Calculer $f(\frac{1}{2})$ et en déduire que appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

   b. Calculer $f(\frac{3}{4})$ et en déduire que appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$.

   c. A l'aide d'une calculatrice scientifique déterminer l'encadrement de α d'amplitude 10^{-1} .

j. Théorème

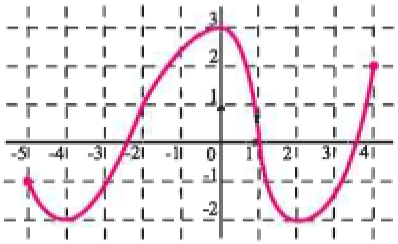
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Si la fonction f ne s'annule en aucun point de I alors elle garde un signe constante sur I .

2. Image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue

a. Activité 7 Page 15

On a représenté ci – contre la courbe d'une fonction f définie sur $[-5,4]$

1. Déterminer $f[-5,4]$.

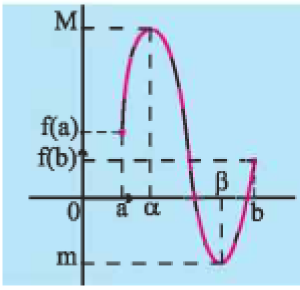


2. a. Déterminer le minimum m et le maximum M de f sur $[-5,4]$.

b. Résoudre graphiquement chacune des équations $f(x) = m$ et $f(x) = M$.

b. Théorème Page 15

L'image d'un intervalle fermé borné $[a, b]$ par une fonction continue est un intervalle fermé borné $[m, M]$.
Le réel m est le minimum de f sur $[a, b]$.
Le réel M est le maximum de f sur $[a, b]$.



c. Activité 8 Page 16

Soit $\boldsymbol{f}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = sin^2(x)$.

1. Déterminer le minimum et le maximum de f sur $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$.

2. En déduire $\boldsymbol{f}\left(\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]\right)$.

V. Image d'un intervalle par une fonction strictement monotone

1. **Théorème (admis) Page 16**

Soit f une définie sur un intervalle de type $[a, b[$ (b fini ou infinie) .

- Si la fonction f est croissante et majorée alors f possède une limite finie en b .
- Si la fonction f est croissante et non majorée alors f tend vers $+\infty$ b .
- Si la fonction f est décroissante et minorée alors f possède une limite finie en b.
- Si la fonction f est décroissante et minorée alors f tend vers $-\infty$ b .

2. **Théorème (admis) Page 16**

L'image d'un intervalle I par une fonction continue et strictement monotone sur I est un intervalle de même nature.

3. **Exemples**

Intervalle I	Si f est strictement croissante sur I	Si f est strictement décroissante sur I
$I=[a,b]$	$f(I)=[f(a),f(b)]$	$f(I)=[f(b),f(a)]$
$I=[a,b[\ (a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R})$	$f(I)=[f(a),\lim\limits_{b^-} f[$	$f(I)=]\lim\limits_{b^-} f, f(a)]$
$I=[a,+\infty[\ (a\in\mathbb{R})$	$f(I)=[f(a),\lim\limits_{+\infty} f[$	$f(I)=]\lim\limits_{+\infty} f, f(a)]$
$I=]a,b[\ (a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R})$	$f(I)=]\lim\limits_{a^+} f,\lim\limits_{b^-} f[$	$f(I)=]\lim\limits_{b^-} f,\lim\limits_{a^+} f[$

4. **Exercice résolu 4 Page 17**

Déterminer l'image l'intervalle I par la fonction f dans chacun des cas ci – dessous.

1. $f: \mapsto x^2 - 2x$, $I =]-\infty, 0]$.
2. $f: \mapsto \frac{1}{x^2}$, $I = [1, +\infty[$.
3. $f: \mapsto \sin(x)$, $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.