Chapitre : 2	Cours : Suites Réelles	Prof : Mr Gary Badreddine
4ème Année : section-sciences-expérimentales	Lycée : El Montazeh El Mourouj 2	Année scolaire : 2018/2019

I. Rappels

1. Définition

Soit n_0 un entier naturel .

Lorsqu' à tout entier naturel n supérieure ou égal à n_0 on associe un réel unique (u_n) on dit que l'on a défini une suite de nombres réels.

Le réel (u_n) s'appelle le terme général de la suite et se note u_n .

La suite se note $(\boldsymbol{u_n})_{\boldsymbol{n\geq n_0}}$ **ou** (u_n).

Autrement écrit :

$$(u_n) : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u_n \end{array}$$

2. Le Principe de récurrence

a. L'axiome

On veut démontrer qu'une proposition $\wp_n$ est vraie pour tout entier naturel n

- On montre que la 1ère proposition $\wp_0$ ($où$ $\wp_{n_0}$) est vraie .
- On suppose que la proposition est vraie au rang n(c'est-à-dire $\wp_{\mathrm{n}}$ est vraie) (pour un entier n quelconque) .
- On montre alors que la propriété est vraie au rang $n+1$ (cad $\wp_{\mathrm{n+1}}$ est vraie) .

b. Activité

Soit $(\boldsymbol{u_n})$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} \boldsymbol{u_0 = 0} \\ \forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}\ ,\ \boldsymbol{u_{n+1}} = \dfrac{\boldsymbol{2}}{\sqrt{\boldsymbol{4-u_n^2}}} \end{cases}$.

Montrer que $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, on a : $\boldsymbol{0 \leq u_n < \sqrt{2}}$.

c. Suites Arithmétiques et Suites Géométriques

Suites Arithmétiques	Suites Géométriques
$u_{n+1} = u_n + r$ (r: *la raison de la suite* r: *indépndant de n*)	$v_{n+1} = q\, v_n$ (q : *la raison de la suite* q : *indépndant de n*)
$u_n = u_0 + n\, r$ u_0 1$^{\text{ère}}$ terme	$v_n = v_0 q^n$ v_0 1$^{\text{ère}}$ terme
$u_m = u_n + (m-n)\, r$ $(m \neq n\,, m \in \mathbb{N}^*\, et\ \ n \in \mathbb{N}^*)$	$v_m = v_n q^{m-n}$ $(m \neq n\,, m \in \mathbb{N}^*\, et\ \ n \in \mathbb{N}^*)$
$r = 0$ Ssi $u_{n+1} = u_n = \cdots . = u_0$ u_n Suite constante	$q = 1$ Ssi v_n Suite constante
$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$ Si $r \neq 0$, $N_t = (n-1-0)+1 = n$	$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k = v_0 \frac{1-q^n}{1-q}$ Si $q \neq 1$
$S_n = \sum_{k=p}^{n} u_k = \frac{n-p+1}{2}(u_p + u_n)$ $N_t = (n-p)+1$	$S_n = \sum_{k=p}^{n} v_k = v_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$ Si $q \neq 1$
$S_n = \sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)u_p$ Si $r = 0$	$S_n = \sum_{k=p}^{n} v_k = (n-p+1)v_p$ Si $q = 1$

* $Si \;\; r > 0 \;\; \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. * $Si \;\; r < 0 \;\; \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.	* $Si \;\; q > 1 \; et \; u_0 > 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ * $Si \;\; q > 1 \; et \; u_0 < 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ * $Si \;\; -1 < q < 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ * $q \leq -1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = pas\ de\ limite$
* $Si \;\; r > 0 \;\; (u_n)$ est strictement croissante . * $Si \;\; r < 0 \;\; (u_n)$ est strictement décroissante.	* $0 < q < 1 \;\; u_0 > 0$ (u_n) est strictement décroissante * $0 < q < 1 \;\; u_0 < 0$ (u_n) est strictement croissante * $q > 1 \;\; u_0 > 0 \;\; (u_n)$ est strictement croissante * $q > 1 \;\; u_0 < 0 \;\; (u_n)$ est strictement décroissante

3. Activité 1 Page 24

Dans chacun des cas ci – dessous , calculer la limite de la suite (u_n) .

1. $\boldsymbol{u_n = \frac{1}{n}}$, $\boldsymbol{n \geq 1.}$

2. $\boldsymbol{u_n = n^2 + 1 , n \geq 0}$.

3. $\boldsymbol{u_n = 10^n , n \geq 0}$.

4. Activité 2 Page 24

On désigne par (u_n) la suite définie par : $u_n = \frac{1-(-1)^n}{2n+(-1)^n}$.

1. Donner l'expression de $\boldsymbol{u_{2n}}$ **et** $\boldsymbol{u_{2n+1}}$.

2. Que peut –on dire de la limite de $\boldsymbol{u_n}$**?**

5. **Théorème (admis)**

Soit (u_n) une suite réelle et a fini ou infini .

$$\lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{u_n} = \boldsymbol{a} \ \ , si\ et\ seulement\ si\ , \lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{u_{2n}} = \boldsymbol{a} \ \ et \ \ \lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{u_{2n+1}} = \boldsymbol{a}\ .$$

6. **Activité 3 Page 24**

Étudier la convergence de la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ $, \boldsymbol{n \geq 1}$.

7. **Activité 4 Page 24**

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = (-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}}$.

1. Montrer que (u_n) est bornée.

2. La suite (u_n) est – elle convergente ?

8. Activité 5 Page 24

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = \frac{n}{2n+2}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente .

2. La suite (u_n) est –elle bornée ?

9. Théorème (admis) Page 25

Toute suite convergente est bornée .

10. Opérations sur les limites de suites Page 25

Soit a et b deux réels.

Les résultats qui suivent concernent les opérations sur les limites de suites réells.

Soit deux suites et deux réels a et b .

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$
a	b	$a+b$
$+\infty$	b	$+\infty$
$-\infty$	b	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	$\lim_{n\to+\infty} v_n$	$\lim_{n\to+\infty} (u_n.v_n)$
a	b	$a.b$
∞	$b \neq 0$	∞
∞	∞	∞

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	$\lim_{n\to+\infty} v_n$	$\lim_{n\to+\infty} (\frac{u_n}{v_n})$
a	$b \neq 0$	$\frac{a}{b}$
∞	b	∞
a	$+\infty$	0
a	$-\infty$	0
$a \neq 0$	0	∞

11. Activité 6 Page 25

Dans chacun des cas ci – dessous , calculer la limite de la suite (u_n) .

1. $u_n = \frac{1}{2-\frac{1}{\sqrt{n}}} - 3n^3 , n \geq 1$.

2. $u_n = \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2}\right)(n^3 + 3n - 1) , n \geq 1$.

3. $u_n = -\frac{1}{n} + \sqrt{\frac{5n+3}{2n+9}} , n \geq 1$.

4. $u_n = \frac{1}{\sqrt{4n+1}}\sqrt{n+\frac{1}{2}}$, $n \geq 0$.

12. Remarque

Pour montrer la monotonie d'une suite (u_n)on compare u_n et u_{n+1}.

- $u_{n+1} - u_n$.
- $\frac{u_n+1}{u_n}$ et 1 ; $u_n \neq 0$ et le signe (u_n).
- ${u_n}^2$ et ${u_{n+1}}^2$.
- Par récurrence .

II. Suites géométriques et applications

1. Activité 1 Page 25

Dans chacun des cas ci – dessous , calculer la limite de la suite (u_n) .

1. $u_n = (\frac{1}{5})^n$, $n \geq 0$.

2. $u_n = (-\frac{2}{\sqrt{5}})^n$, $n \geq 0$.

3. $u_n = (\sqrt{\pi})^n \ , n \geq 0$.

2. Théorème (Rappel) Page 26

Soit (u_n) une suite géométrique définie par $u_n = q^n \ , n \geq 0$, où q est un réel non nul .

$* \ \boldsymbol{Si} \ \ \boldsymbol{q} > 1 \ , \boldsymbol{alors} \ \lim_{n \to +\infty} \boldsymbol{u_n} = +\infty.$

$* \ \boldsymbol{Si} \ |\boldsymbol{q}| < 1 \ , \boldsymbol{alors} \ \lim_{n \to +\infty} \boldsymbol{u_n} = \boldsymbol{0}.$

$* \ \boldsymbol{Si} \ \ \boldsymbol{q} \leq -\boldsymbol{1}$ **, alors la suite** (u_n) **n'a pas de limite .**

$* \ \boldsymbol{Si} \ \ \boldsymbol{q} = \boldsymbol{1}$ **, alors la suite** (u_n) **est constante .**

3. Activité 2 Page 26

Dans chacun des cas ci – dessous , calculer la limite de la suite (u_n) .

1. $u_n = \frac{1-(-\frac{1}{3})^n}{1-n^3} \ , n \geq 3$.

2. $u_n = \frac{(-2)^n - 3}{4(-2)^n + 5} \ , n \geq 0$.

3. $u_n = 1 + \frac{5}{3} + \cdots .. + (\frac{5}{3})^n \ , n \geq 0$.

4. $u_n = -3 - \frac{9}{\pi} - \cdots ... - 3(\frac{3}{\pi})^n, n \geq 0$.

4. Activité 3 Page 26

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \, , \\ u_{n+1} = 2\, u_n - 1 \, , \ n \geq 0 \end{cases}$.

1. Déterminer la solution α de l'équation $= \ 2x - 1$.

2. On désigne par (v_n) définie par : $v_n = u_n - \alpha$, $n \geq 0$.
   Montrer que (v_n) est une suite géométrique .

3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

III. Suites du type $v_n = f(u_n)$

1. Théorème (admis) Page 28

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et (u_n) une suite d'éléments de .

$$\begin{cases} * \quad Si \ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \ \ (fini \ \ ou \ infinie\ ) \ et \\ * \ Si \ \lim\limits_{x\to l} f(x) = L \ \ (fini \ \ ou \ infinie\ ), alors \end{cases} \Rightarrow \ \lim\limits_{n\to+\infty} (f(u_n)) = L \ .$$

2. Activité 1 Page 28

Dans chacun des cas ci – dessous , calculer la limite de la suite (u_n) .

1. $u_n = sin(\,0.75)^n \ \ ,n \geq 1$.

2. $u_n = n\,sin(\frac{\pi}{2n})^n \ \ ,n \geq 1$.

3. $u_n = \ cos(\frac{\pi n}{2n+1})^n \ \ ,n \geq 0$.

4. $u_n = \frac{\cos(\frac{1}{n})+1}{n} \ \ ,n \geq 1$.

IV. Limites et ordre

1. Activité 1 Page 28

On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{n+\cos(n)}{n^2+1}$, $n \geq 1$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\frac{n-1}{n^2+1} \leq v_n \leq \frac{n+1}{n^2+1}$.

2. Déterminer une valeur approchée à 10^{-5} des réels v_{1000} et v_{10^6}.

3. Que peut – on dire conjecturer sur $\lim_{n\to+\infty} v_n$?

2. Activité 2 Page 28

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$.

2. En déduire que pour tout entier $n \geq 4$, $\frac{2^n}{n} \geq n$.

3. Que peut –on conjecturer sur $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2^n}{n}$?

3. Retenons 2 Page 29

Nous admettons les résultats ci- dessous qui nous permettent de trouver la limite d'une suite par comparaison avec d'autres suites dont on connait les limites.
Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) des suites réelles , a et b deux réels.

$*$ $Si\ \ u_n \leq v_n\ , n\ \geq N_0\ et\ si\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = b$, alors $a \leq b$.

$*$ $Si\ \ v_n \leq u_n \leq w_n\ , n\ \geq N_0\ et\ si\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.

$*$ $Si\ 0 \leq |u_n| \leq v_n\ , n\ \geq N_0\ et\ si\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

$*$ $Si\ \ u_n \leq v_n\ , n\ \geq N_0\ et\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

$*$ $Si\ \ u_n \leq v_n\ , n\ \geq N_0\ et\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

4. Activité 3 Page 29

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}+\cos^2 n}$, $n \geq 0$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.

2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

5. Activité 4 Page 29

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = \frac{10^n}{n!}$.

1. Montrer que $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{10}{11}$ pour tout entier $n \geq 10$.

2. Montrer alors que $0 < u_n \leq (\frac{10}{11})^{n-10}\, u_{10}\,,\, n \geq 10$.
   En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

3. A l'aide de la calculatrice , déterminer un entier naturel n_0 pour que $|u_n| \leq 10^{-6}, n \geq n_0$.

6. Activité 5 Page 29

Dans chacun des cas ci – dessous , calculer la limite de la suite (u_n) .

1. $u_n = (3n+1)^n \ , n \geq 1.$

2. $u_n = \frac{n^3}{2+\sin(3n)} \ n \geq 1.$

3. $u_n = n^3(\sin(n) - 3), n \geq 1.$

4. $u_n = \frac{n+sin^2(2n)}{n^3} \ , n \geq 1.$

7. **Retenons**

u_k *et* v_k étant deux suites définies sur $\mathbb{N}$.

Soit $\boldsymbol{\alpha}$ une constante réel et , n et p des entiers naturels telque $m \geq p \geq n$

$$\sum_{k=n}^{m} \alpha = (m-n+1)\alpha \ ; \quad \sum_{k=n}^{m} \alpha\, u_k = \alpha \sum_{k=n}^{m} u_k \, .$$

$$\sum_{k=n}^{m} u_k = \sum_{k=n}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{m} u_k \ ; \quad \sum_{k=n}^{m} (u_k + v_k) = \sum_{k=n}^{m} u_k + \sum_{k=n}^{m} v_k \ .$$

$$\sum_{k=n}^{m} u_k = \sum_{k=n}^{m+1} u_k - u_{m+1} \ ; \quad \sum_{k=n}^{m} u_k = \sum_{k=n+1}^{m} u_k + u_n \ .$$

$$\sum_{k=0}^{m} (u_{k+1} - u_k) = u_{m+1} - u_0 \, .$$

8. **Activité 6 Page 30**

1. Écrire les sommes suivantes en utilisant le symbole $\sum$.
   a. $A = 1 + 2 + 3 + \cdots . + n$.

   b. $B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots - \frac{1}{512}$.

2. Calculer les sommes suivantes .

$$C = \sum_{k=10}^{500} 1 =$$

$$D = \sum_{k=0}^{20} (3k-1) =$$

$$E = \sum_{k=3}^{10} 10^{-k} =$$

9. Activité 7 Page 30

1. Vérifier que pour tout entier non nul , $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}$.

2. En déduire la limite de la suite (w_n) définie par $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$, $n \geq 1$.

V. Convergence des suites monotones

1. Activité 1 Page 30

Soit la suite (w_n) définie par $w_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$, $n \geq 1$.

1. a. Montrer que $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \geq 1$.

b. Vérifier que la suite (w_n) est décroissante et minorée .

c. Montrer que (w_n) est convergente et déterminer sa limite .

2. Soit la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n}{n}$, $n \geq 1$.
   a. Vérifier que la suite (v_n) est croissante.

   b. La suite (v_n) est –elle convergente?

2. Théorème Page 31

Soit (u_n) une suite définie pour $n \geq 0$.

- Si la suite (u_n) est croissante et majorée , alors elle converge vers un réel a et pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq a$.
- Si la suite (u_n) est croissante et non majorée alors elle tend vers $+\infty$.
- Si la suite (u_n) est décroissante et minorée ,alors elle converge vers un réel b et $n \geq 0$, $u_n \geq b$.
- Si la suite (u_n) est décroissante et non minorée ,alors elle tend vers $-\infty$.

3. Activité 2 Page 30

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante .

2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n \geq \sqrt{n}$.

3. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4. Montrer alors que la suite (u_n) est non majorée.

VI. Suites récurrentes

1. Théorème Page 31

Soit une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \geq 0$ où f est une fonction.

Si la suite (u_n) est convergente vers un réel $\boldsymbol{a}$ et si la fonction $\boldsymbol{f}$ est continue en $\boldsymbol{a}$ alors $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$.

2. Activité 2 page 32

Soit la suite (a_n)définie par $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$, $n \geq 0$.

1. Montrer que la suite (a_n) est croissante et majorée par 2.

2. Déterminer sa limite .

3. Activité 3 page 32

Soit la suite (u_n)définie par $u_0 = 0.25$ et $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$, $n \geq 0$.

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

2. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $0 \leq u_n \leq 1$.

3. Déterminer sa limite de (u_n).

VII. Suites adjacentes

1. Définition et théorème 32

Deux suites$(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ adjacentes lorsqu'elles vérifient les conditions

- **Pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq v_n$.**
- **La suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante ,**
- **La suite $(u_n - v_n)$ converge vers 0 .**
-

2. Exercice résolu 2 Page 33

Soit la suite(u_n) définie par $u_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}, n \geq 1$.

1. Montrer que la suite (u_{2n}) est croissante et la suite (u_{2n+1}) est décroissante.

2. Comparer u_{2n} et u_{2n+1} pour tout entier $n \geq 1$ et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_{2n} - u_{2n+1})$.

3. Montrer que la suite (u_n) est convergente vers un réel α .

4. a. Vérifier que $u_{2n} \leq \alpha \leq u_{2n+1}$.

   b. Calculer u_4 et u_5 et donner une valeur de α à 10^{-3} approchée à près .

3. <u>**Exercice 21 Page 38**</u>

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 12$, $v_0 = 1$,
$u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$, $v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$, $n \geq 0$.

1. Montrer que la suite $(u_n - v_n)$ est géométrique, on précisera sa raison et son premier terme.

2. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq v_n$.

3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et qu'elles convergent vers la même limite α .

4. On pose pour tout $n \geq 0$, $t_n = 3u_n + 8v_n$.
   a. Montre que (t_n) est une suite constante .

   b. En déduire la valeur de α .