M. Wissem Fligène

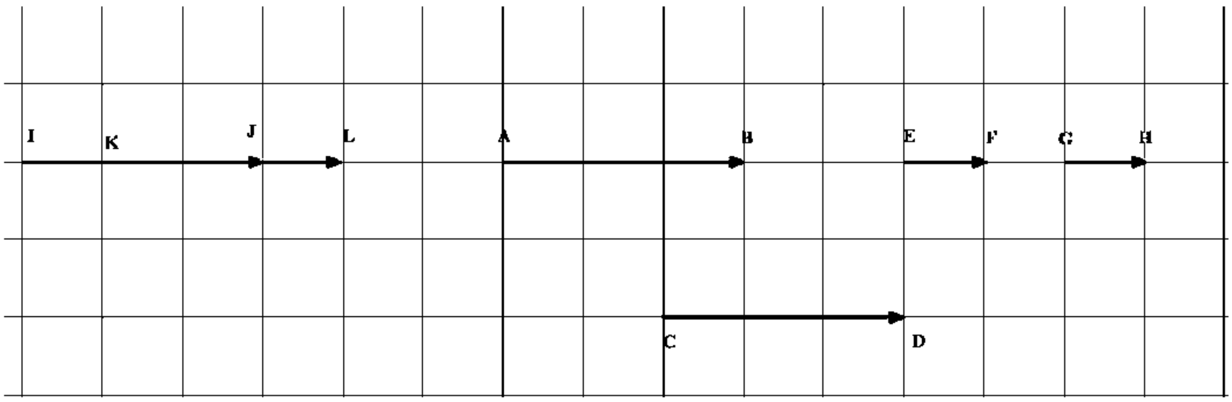
Calcul vectoriel

2Sc & T - Cours

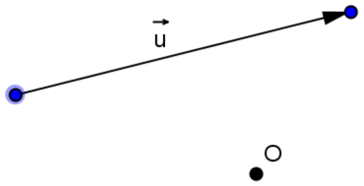
I. Rappels :

- Soient(A, B) et (C, D) deux bipoints.
  Tracer ces quatre points tels que les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu

  Ces bipoints représentent un même objet mathématique appelé .... et noté $\overrightarrow{AB}$ou $\overrightarrow{CD}$.
  On écrit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
- Les bipoints (A, A) et (B, B) représentent le même vecteur appelé .... et noté ......
- Soient A, B, C et D quatre points du plan
  $(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD})$ si et seulement si (....)
  $*$ Citer les vecteurs égaux sur la figure ci-dessous :
  ....
....



- $(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD})$ équivaut à $(\overrightarrow{\dots C} = \overrightarrow{\dots D})$
- Si A, B et C ne sont pas alignés, alors :
  $(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD})$équivaut à ABDC est ....
- $(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC})$ équivaut à ....
- $(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC})$ équivaut à ....
- Etant donné un vecteur $\vec{u}$ et un point O, il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$



II. Addition des vecteurs :

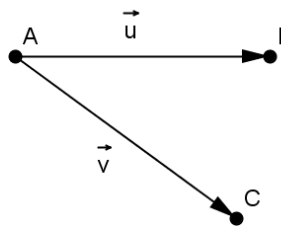
1- Définition :

- *Activité 1 page 68*

↪**Définition** :

Soit A un point du plan et soient $\vec{u}$et $\vec{v}$ deux vecteurs. Soient B et C les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
On appelle vecteur somme de $\vec{u}$et $\vec{v}$, le vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ où D le point tels que $[BC]$ et $[AD]$ aient même milieu.
On note $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

Construire $\vec{w}$ sur la figure ci-contre :



2- Propriétés :

- Pour tous points A, B et C, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} =$ … … …, c'est la relation de ....
- Pour tout vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :
  * $\vec{u} + \vec{v} =$ … … … …
  * $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots) =$ … … … … … … … …
  * $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} +$ … … $=$ … …
- Tout vecteur $\vec{u}$ admet un unique opposé, noté $-\vec{u}$ et on a : $\vec{u} + (-\vec{u}) = -\vec{u} + \vec{u} =$ … …

Remarques :

(i) $\vec{u} + (-\vec{v}) =$ … … $-$ … …

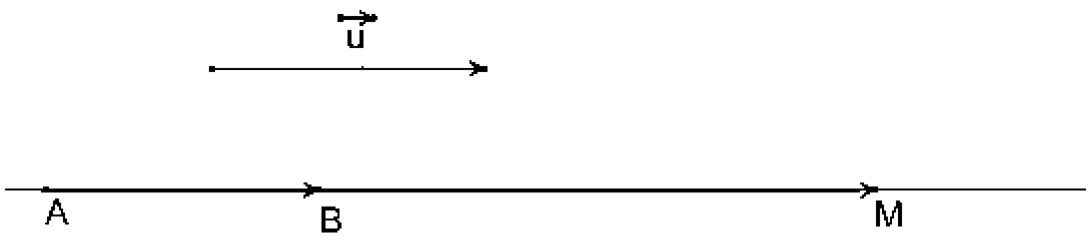
(ii) L'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur .... ; Donc $-\overrightarrow{AB} =$ … …

Application : Activités 5 et 6 page 69

III. Multiplication d'un vecteur par un réel :

1- Définition :

Soient A un point du plan, $\vec{u}$ un vecteur non nul et B le point tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Soit α un réel et M le point de (AB) d'abscisse α dans le repère (A, B).



On appelle vecteur produit de $\vec{u}$ par α et on note $\alpha\vec{u}$, le vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{AM}$

Remarques :

- Pour tout réel α, on a : $\alpha\vec{0} =$ …
- Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a : $0\vec{u} =$ … et $1\vec{u} =$ …

2- Propriétés :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tous réels αet β, on a :

- $(-1)\vec{u} =$ … …
- $\alpha\vec{u} + \beta\vec{u} =$ … … … …
- $\alpha(\beta\vec{u}) =$ … … …
- $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) =$ … … … … …
- $\alpha\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow$ ....

Application : exercice 3 page 82

A faire : exercice 1 page 90

IV. Composantes d'un vecteur du plan dans une base :

1- Vecteurs colinéaires :

- *Activité 17 page 72*

Définition 1 :

Deux vecteurs sont dits **colinéaires** si et seulement si l'un est ....

Définition 2 :

Deux vecteurs non nuls sont dits **colinéaires** si et seulement si ils ont ....

Conséquences :

- Soit A, B et C trois points distincts du plan

  A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont ....

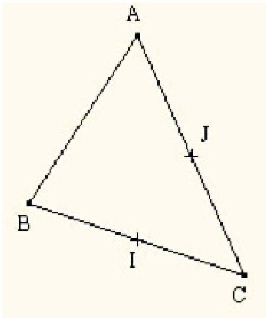
2- Base de l'ensemble des vecteurs du plan :

Définition :

On appelle **base** de l'ensemble des vecteurs du plan tout couple $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de vecteurs non colinéaires

Exemples :

- Citer de la figure ci-contre des couples des vecteurs formant une base



....

....

- Le couple $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IJ})$ forme-t-il une base de l'ensemble des vecteurs ? pourquoi ?

....

3- Composantes d'un vecteur dans une base :

- *Activité 19 page 73*

↪**Théorème et définition** :

Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base de l'ensemble des vecteurs du plan et $\vec{u}$ un vecteur. Il existe un couple unique (x, y) de réels tels que $\vec{u} =$ … … … … … … … …

(x, y)est appelé .... du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$

On note $\vec{u}\binom{\cdots}{\cdots}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}$ ou $\vec{u}\binom{\cdots}{\cdots}$

Ainsi :

$$\boxed{\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} \text{ signifie } \vec{u}\binom{\cdots}{\cdots}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}}$$

Propriétés :

1) $\vec{0}\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}$; $\vec{\imath}\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}$; $\vec{\jmath}\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}$

2) Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}$ alors :

   a) $\vec{u} = \vec{v}$siginifie ....

   b) $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}$ et $\alpha\vec{u}\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}$; $\alpha \in \mathbb{R}$

<u>Application</u> : exercices 4 et 5 page 82

4- <u>Condition analytique de colinéarité de deux vecteurs :</u>

- *Activité 23 page 74*

↪**Retenons** :

Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base de l'ensemble des vecteurs du plan.

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}$ sont colinéaires si et seulement si ....

Le réel $xy' - x'y$ s'appelle le .... des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}$ dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

On note $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$

Ainsi :

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}$ et$\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}$ sont colinéaires si et seulement si $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = \ldots$

<u>Application</u> : exercice 6 page 82

5- <u>Repère cartésien du plan :</u>

Définition :

Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base de l'ensemble des vecteurs du plan P. O un point de P.

- Le triplet $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ s'appelle un <u>repère cartésien</u> du plan P.
- Soit M un point de P. il existe un couple unique (x, y) de réels tels que : $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$
- (x, y) est le couple de .... du point M dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On note ....
- x est .... de M, y est .... de M dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$
- O est ....
- $(O,\vec{\imath})$ s'appelle l'axe ....
- $(O,\vec{\jmath})$ s'appelle l'axe ....

- *Activité 25 page 75*

↪**Retenons** :

Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan.

Si $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}$

<u>A faire</u> : exercices 9 et 10 page 90

V. Condition d'orthogonalité de deux vecteurs – Repère orthonormé :

1- Vecteurs orthogonaux :

Définition :

Soit A un point du plan et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.

Soient B et C les points tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si les droites (AB) et (AC) sont ....

On écrit : $\vec{\boldsymbol{u}} \perp \vec{\boldsymbol{v}}$ (on lit « $\vec{u}$ .... $\vec{v}$ »)

Par convention : $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur du plan.

2- Norme d'un vecteur :

Définition :

Soient A un point et $\vec{u}$ un vecteur. Soit B le point tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

On appelle **norme** de $\vec{u}$, le réel positif, noté $\|\vec{\boldsymbol{u}}\|$et qui est égal à ....

Ainsi $\boxed{\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = \dots\dots\dots}$

Lorsque $\|\vec{u}\| = 1$, on dit que $\vec{u}$ est un vecteur .... ou ....

Propriétés :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tout réel α, on a :

(i) $\|\vec{u}\| = 0 \iff \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

(ii) $\|\alpha\vec{u}\| = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$; en particulier $\|-\vec{u}\| = \dots\dots\dots$

3- Base orthonormée – Repère orthonormé :

- $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une base orthonormée si et seulement si .... et ....
- $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est unrepère orthonormé si et seulement si ....

4- Distance de 2 points – Expression de la norme d'un vecteur :

- *Activité 32 page 78*

↪**Retenons** :

- Soit $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points du plan muni d'un repère orthonormé alors :

  $AB = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

- Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée alors $\|\vec{u}\| = \dots\dots\dots\dots\dots$

Application : exercice 10 page 83 et activité 33 page 78

5- Condition analytique d'orthogonalité de deux vecteurs :

- *Activité 34 page 78*

↪**Retenons** :

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée.

$$\vec{\boldsymbol{u}} \perp \vec{\boldsymbol{v}} \iff \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Application : activité 35 page 78

VI. Vecteurs et configurations géométriques :

- *Activité 37 page 79*

  ↪**Retenons** :

$$(ABCD\ est\ un\ parallélogramme) \Leftrightarrow (\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.)$$

$$\Leftrightarrow (\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.)$$

- *Activité 39 page 80*

  ↪**Retenons** :

  - Soit $I = A * B$. Pour tout point M du plan : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} =$ … … … …
  - Soit A, B, C et D quatre points distincts du plan

  Les droites (AB) et (CD) sont <u>parallèles</u> si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont ....

- *Activité 40 page 80*

  ↪**Retenons** :

  (G est le centre de gravité du triangle ABC) ⇔ $(\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.)$

<u>A faire</u> : exercices 15, 16 et 17 page 91