Exercice N°1

Pour chaque question, une seule réponse est exacte.

On pose $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1°) La forme algébrique de z^2 est :

A : $2\sqrt{2}$ **B** : $2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$ **C** : $2+\sqrt{2} + i(2-\sqrt{2})$ **D** : $2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$

2°) z^2 s'écrit sous forme exponentielle :

A : $4e^{i\frac{\pi}{4}}$ **B** : $4e^{-i\frac{\pi}{4}}$ **C** : $4e^{i\frac{3\pi}{4}}$ **D** : $4e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

3°) z s'écrit sous forme exponentielle :

A : $2e^{i\frac{7\pi}{8}}$ **B** : $2e^{i\frac{\pi}{8}}$ **C** : $2e^{i\frac{5\pi}{8}}$ **D** : $2e^{i\frac{3\pi}{8}}$

4°) $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ sont les cosinus et sinus de :

A : $\frac{7\pi}{8}$ **B** : $\frac{5\pi}{8}$ **C** : $\frac{3\pi}{8}$ **D** : $\frac{\pi}{8}$

Exercice N°2

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2\sqrt{3} - 2i$ et $z_B = 2\sqrt{3} + 2i$.

1°) Déterminer le module et un argument de z_A et de z_B.

2°) En déduire une construction des points A et B dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

3°) Déterminer une mesure en radians de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB}})$.

4°) Déterminer la nature du triangle AOB.

Exercice N°3

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points E, B et C d'affixes respectives : 1 ; $1+i$ et $-\sqrt{3}+i$.

1) Ecrire z_B et z_C sous forme trigonométrique.

2) Montrer que le triangle EBC est rectangle en B et déterminer l'affixe de son centre de gravité.

3) Déterminer l'affixe du point D tel que EBCD soit un rectangle.

4) Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $\left|\bar{z}-1+i\right| = \left|\sqrt{3}-i\right|$.

Exercice N°4

On note A et B les points d'affixes respectifs 1 et $-2i$. Déterminer en utilisant les points A et B :

a) L'ensemble E des points d'affixes z tel que : $(2+i)z+(2-i)\bar{z}=4$

b) L'ensemble F des points d'affixes z tel que : $(z+2i)(\bar{z}-2i)=4$

Exercice N°5

On pose $z' = \frac{4-2z}{iz+i}$, avec z différent de -1

Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe, d'affixe z tel que $|z'| = 2$

Exercice N°6

Soit z un nombre complexe distinct de 1.

On pose $Z_1 = \frac{z+\bar{z}-2}{(1-z)(1-\bar{z})}$ et $Z_1 = \frac{z-\bar{z}}{(1-z)(1-\bar{z})}$.

Montrer que Z_1 est réel et que Z_2 est imaginaire pur.

Exercice N°7

A tout point $M(z)$ distinct de $A(2)$, on associe le point $M'(z')$ avec $z' = \dfrac{\overline{z}+i}{\overline{z}-2}$

On note $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, y, x' et y' des réels

1) Exprimer x' et y' en fonction de x et y
2) Déterminer et construire l'ensemble des points $M(z)$ tels que :
   a) z' est un réel b) z' est un imaginaire pur
3) Déterminer et construire l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z'| = 1$

Exercice N°8

On pose $Z = \dfrac{z+4i}{\overline{z}-4i}$, $z \in \mathbb{C}$

1) Déterminer l'ensemble des valeurs de z pour lesquelles Z est définie. Dans ce cas, calculer $|Z|$
2) Déterminer l'ensemble des valeurs de z pour lesquelles Z est réel ; pour lesquelles Z est imaginaire pur

Exercice N°9

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, Soit A le point d'affixe i

On associe à tout point M du plan, distinct de A, d'affixe z, le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \dfrac{iz}{z-i}$

1) Déterminer les points M tels que $z' = z$
2) a) Déterminer sous forme algébrique z' si $z = 1+i$
   b) Déterminer sous forme algébrique z si $z' = 1+i$
3) a) Déterminer l'ensemble E des points M, distinct de A, pour lesquels z' est réel
   b) Déterminer l'ensemble E des points M, distinct de A, pour lesquels z' est imaginaire
4) a) Montrer que pour tout z différent de i : $z' - i = \dfrac{-1}{z-i}$

c) On suppose que M, d'affixe z, appartient au cercle Γ de centre A et de rayon 1
   Montrer que M' appartient à Γ

Exercice N°10

On considère le nombre complexe : $z = 1-\sqrt{3} + i\,(1+\sqrt{3})$

1°) Écrire z² sous forme algébrique.

2°) Déterminer le module et un argument de z²

3°) Indiquer le signe de la partie réelle de z et celui de la partie imaginaire, puis, à l'aide des propriétés sur module et arguments, déterminer le module et un argument de z.

4°) Etablir les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice N°11

Dans le plan rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ on considère les points *A*, *B* et *C* d'affixes respectives : $Z_A = \dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$, $Z_B = 1-i$, $Z_C = \dfrac{Z_A}{Z_B}$.

1. a. Écrire Z_C sous forme algébrique.
   b. Déterminer le module et un argument de Z_A et de Z_B.
   c. Écrire Z_C sous forme exponentielle ; en déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et de $\sin\dfrac{\pi}{12}$.
2. a. Placer les points A, B et C ainsi qu'un autre point D dans une figure (l'unité : 4 cm) tel que ABCD soit un parallélogramme
   b. Déterminer sous forme algébrique Z_D l'affixe du point D

Exercice N°13

Le plan complexe *P* est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$. On considère dans *P* les points *A*, *B* et *C* d'affixes respectives $z_A = 1 + i\sqrt{3}$, $z_B = -1 - i$ et $z_C = -(2+\sqrt{3}) + i$.

1. a. Calculer sous forme algébrique le nombre complexe $W = \dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$

   b. En déduire la nature du triangle *ABC*.

2. a. Déterminer le module et un argument de z_A et z_B

   b. Placer les points A, B et C dans une figure (l'unité : 2 cm)

2. a. Placer le point D d'affixe $z_A + z_C$.

   b. Montrer que OBD est un triangle rectangle

Exercice N°14

On donne dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ les points $A\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)$ $B(2+2i)$ et $C\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}i\right)$.

1) Montrer que le quadrilatère $OABC$ est un losange.

2) Soit m un réel tel que $m \notin \left\{1;\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right\}$. On pose $z = m + (2-m)i$ et le point $M(\ z\ )$.

   a- Montrer que les points M, C et A sont alignés.

   b- Déterminer m pour que M soit sur le cercle de centre O et passant par B.

3) On prend dans cette question $m = 1+\sqrt{3}$ donc on aura $z = \left(1+\sqrt{3}\right) + \left(1-\sqrt{3}\right)i$.

   Soient les nombres complexes $u = \sqrt{3} + i$ et $v = 1 - i$.

   a- Vérifier que $u.v = z$.

   b- Ecrire u et v sous forme exponentielle. Donner alors la forme exponentielle de z.

   c- Etablir les valeurs exactes de $\mathrm{Cos}\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\mathrm{Sin}\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

4) Soit θ un réel de l'intervalle $[0;2\pi[$. On donne les points $P\left(e^{i\theta}\right)$, $Q\left((1+i)e^{i\theta}\right)$ et $R\left(ie^{i\theta}\right)$.

   Justifier que le quadrilatère $OPQR$ est un carré.

Exercice N°15

Le plan est rapporté au repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.
Les points A,B,C,D et E d' affixes respectives a, b, c, d et e sont sur le cercle de diamètre [AB] centré en F. On a alors :

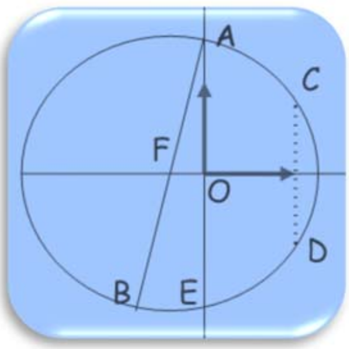
A ☐ $a + b = 0$.

B ☐ $\dfrac{b-c}{a-c}$ est un imaginaire pur.

C ☐ $|d| = |e|$

D ☐ $c - e = \bar{d} - \bar{a}$

E ☐ $a + e + c + d = 2$



ANIS BEN ALI

Exercice N°16

Dans chacun des cas suivants, répondre par VRAI ou FAUX.

1. Le nombre complexe $(1+i)^{10}$ est imaginaire pur.
2. Le nombre complexe $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{(1+i)^2}$ est de module 1 et l'un de ses arguments est $\dfrac{7\pi}{3}$.
3. A est le point d'affixe $-1+2i$ dans un repère orthonormé. L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $(z+1-2i)(\overline{z}+1+2i)=4$ est le cercle de centre A et de rayon 4.
4. On considère le nombre complexe : $Z=-\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}e^{\frac{i\pi}{3}}$.

a. On a : $|Z|=1$. b. On a : $Z=-(1-i)e^{\frac{i\pi}{3}}$.

c. Le réel $-\dfrac{\pi}{12}$ est un argument de Z. d. On a : $Z=e^{\frac{13i\pi}{12}}$.

5. a. Soit z un nombre complexe d'argument $\dfrac{\pi}{3}$.

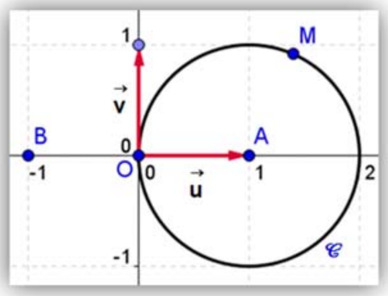
Proposition : « z^{100} est un nombre réel ».

b. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z différente de 1 du plan telle que $\left|\dfrac{z}{1-z}\right|=1$.

Proposition : « l'ensemble (E) est une droite parallèle à l'axe des réels ».

Exercice N°17

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ on donne les points A et B d'affixes respectives 1 et – 1.Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre A et de rayon 1.



La forme exponentielle de l'affixe *z* d'un point M de $(\mathscr{C})$, distinct de O, est donnée par $z=re^{i\theta}$.

Soit M′ le point d'affixe z' telle que $z'=\dfrac{1}{r}e^{i(\pi+\theta)}$.

1°) Montrer que $z'\times\overline{z}=-1$.

2°) Montrer que les points O, M et M′ sont alignés.

3°) a) Justifier l'égalité $|z-1|=1$.

b) Démontrer que $|z'+1|=|z'|$ et en déduire que M′ décrit une droite (D) que l'on déterminera.

4°) Déterminer les points M de $(\mathscr{C})$ pour lesquels $z'=-z$.