Date : septembre 13	**$4^{éme}$ Année Secondaire**
PROF : BEN ALI ANIS	**ANNEXE: LIMITES**

1) Limite à droite- limite à gauche :

Activité 1:

Soit $f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$.Etudier la limite éventuelle de f en zéro.

2) Opérations sur les limites : voir tableaux sur le manuel scolaire.
3) Limites des fonctions polynômes et rationnelles :

Activité 2 :

Calculer $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)$ dans chaque cas :

1) $f(x) = 4 + x^3 - 2|x|x^4$.2) $f(x) = \frac{3x+1}{x^2+x}$.3) $f(x) = \frac{1-x|x|}{x^2+x+1}$.4) $f(x) = \frac{3x^3+2x-2}{x-x^2}$

4) Limites faisant intervenir des radicaux :

Activité 3 :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{4x-2}{x-7}}$ .2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1}$. 3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1} - 2x$.

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1} - x$ .5) $\lim\limits_{x\to1} \frac{\sqrt{x+3}-2x}{2x^2-5x+3}$

5) Limites des fonctions trigonométriques:

1) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin ax}{x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\tan ax}{x} = a \ (a \in \mathbb{R}^*)$ 2) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$ 3) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

6) Techniques utilisant des majorations et minorations :

Activité 4 :

Soit $f(x) = x + 2\cos x$. Etudier $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)$

Activité 5 : Etudier ces deux limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{E(x)}{x}$

Activité 6 :

Soit $f(x) = \frac{3x+\sin x}{x-1}$, $x \in [2;+\infty[$

Montrer que $|f(x)-3| \le \frac{4}{x-1}$ puis donner $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

7) Techniques utilisant les fonctions composées :

Théorème : Soient f et g deux fonctions , a,b et ℓ finis ou infinis.

Si $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{x\to b} g(x) = \ell \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to a} g\circ f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = \ell$

Exemples :

1) Calculer $\lim_{x \to -\infty} \tan\left(\frac{1}{x}\right)$ $\lim_{x \to +\infty} \cos\left(\frac{2\pi x^2 + 2006}{3x^2 + x - 1}\right)$.

2) Calculer $\lim_{x \to -\infty} x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

8) Limite d'une fonction monotone :

Théorème :

i)	Toute fonction croissante et majorée sur un intervalle $[a;b[$ admet une limite finie à gauche en b.
ii)	Toute fonction croissante et majorée sur un intervalle $[a;+\infty[$ admet une limite finie en $+\infty$.
iii)	Toute fonction croissante et non majorée sur un intervalle $[a;b[$ tend vers $+\infty$ en b.(b fini ou infini)
iv)	Toute fonction décroissante et minorée sur un intervalle $[a;b[$ admet une limite finie à gauche en b.
v)	Toute fonction croissante et majorée sur un intervalle $[a;+\infty[$ admet une limite finie en $+\infty$.
vi)	Toute fonction croissante et non majorée sur un intervalle $[a;b[$ tend vers $+\infty$ en b.(b fini ou infini)

9) Limite et ordre :

V_a est un voisinage de $a;(a \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow V_a$ est un intervalle de la forme $]a-\varepsilon;a+\varepsilon[-\{a\}, \varepsilon > 0$

ou bien V_a est un voisinage de l'infini si $a = \infty$.

Théorème	Hypothèse 1 (Pour $x \in V_a$)	Hypothèse 2 (Comportement au voisinage de a)	**Conclusion**
1(positivité)	$f(x) > 0$ ou $f(x) \geq 0$	$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$	$\ell \geq 0$
Corollaire	$f(x) < g(x)$ ou $f(x) \leq g(x)$	$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \to a} g(x) = \ell' \in \mathbb{R}$	$\ell \leq \ell'$
Gendarmes 1	$u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ Ou $u(x) < f(x) < v(x)$	$\lim_{x \to a} u(x) = \lim_{x \to a} v(x) = \ell \in \mathbb{R}$	$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$
G2	$\lvert f(x) - \ell \rvert < v(x)$ ou$\leq$	$\lim_{x \to a} v(x) = 0$	$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$
G3	$\lvert f(x) \rvert < \lvert v(x) \rvert$ ou$\leq$	$\lim_{x \to a} v(x) = 0$	$\lim_{x \to a} f(x) = 0$
3	$u(x) \leq f(x)$ ou $<$	$\lim_{x \to a} u(x) = +\infty$	$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$
3'	$f(x) \leq v(x)$ ou $<$	$\lim_{x \to a} v(x) = -\infty$	$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$