EX 1

Soit u la suite définie sur IN par :

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} \quad \text{pour tout } n \in IN \end{cases}$$

1) a) Montrer que pour tout $n \in IN : 2 \le u_n \le 4$

b) Étudier la monotonie de (u_n).

c) En déduire que la suite u est convergente et calculer sa limite.

2) a) Montrer que pour tout $n \in IN$:

$$4 - u_{n+1} \le \frac{4}{5}(4 - u_n)$$

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in IN : 4 - u_n \le \left(\frac{4}{5}\right)^n$

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3°) On considère la suite (**v_n**) telle que pour tout entier naturel n : $v_n = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 2}$

a) Montrer que (**v_n**) est une suite géométrique dont on précisera la raison q et la premier terme v_0.

b) En déduire (**v_n**) puis (**u_n**) en fonction de n.

c)Retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{u_n}$.

4°) Soit $\mathbf{S}_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$, $n \ge 1$.

a) Exprimer S_n en fonction de n.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{S_n}$.

EX 2

On considère la suite (v_n) définie par

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = v_n + \dfrac{1}{v_n} \quad \text{pour tout } n \ge 0 \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout $n \ge 0,\ v_n \ge 1$.

2) Montrer que la suite (v_n) est croissante

EX 3

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$

pour tout entier naturel *n*.

1. Etudier la monotonie de la suite (u_n).

2) a. Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, $u_n > n^2$

b. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

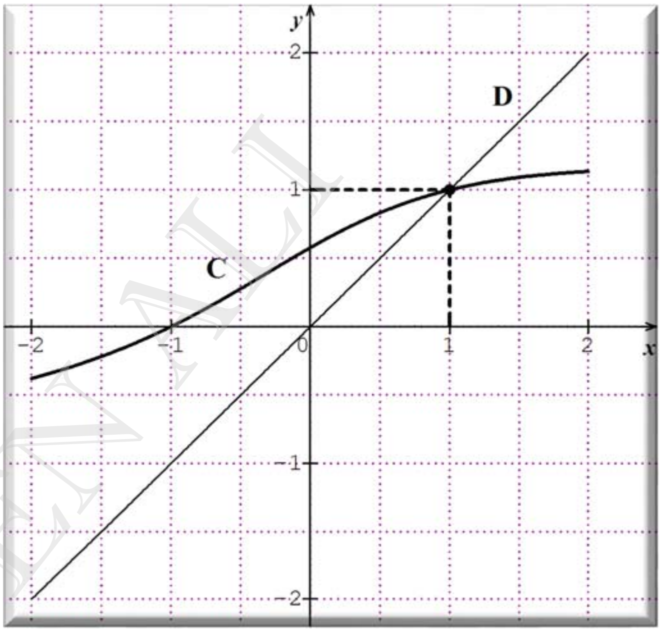
3. Conjecturer une expression de u_n en fonction de *n*, puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

EX 4

Dans le graphique ci-dessous on a représenté la courbe **C** d'une fonction f définie sur $[-2;2]$ et la droite D d'équation $y = x$.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \ge 0$



1) En utilisant le graphique :

- Quel est le sens de variation de f ?
- Déterminer le signe de $f(x) - x$ sur l'intervalle $[-2,2]$

2) a- Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $0 \le u_n \le 1$

b- Vérifier que la suite (u_n) est croissante.

c- En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite ℓ.

3) On considère la suite (t_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$t_n = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} u_k$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$.

EX 5

1°) On considère la suite numérique (**U_n**) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = -5 \\ U_{n+1} = \dfrac{-7U_n - 8}{2U_n + 1} \quad \text{pour tout } n \in IN \end{cases}$$

a) Calculer **U_1** et **U_2**.

b) Montrer que pour tout $n \in IN$ **U_n** $\ne -2$.

2°) On considère la suite (**V_n**) tell que pour tout entier naturel n, $V_n = \dfrac{1 + 2U_n}{2 + U_n}$.

Vers le BAC 2019

a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique et préciser sa raison et son premier terme.
b) En déduire U_n en fonction de n.
d) Déterminer la limite de (U_n).

3°) c) Montrer que pour tout $n \in IN$, $|U_n + 2| \leq \frac{3}{n}$

d) En déduire que (U_n) est une suite convergente et calculer sa limite.

EX6

Le tableau de variation d'une fonction f est le suivant :

x	1		5
$f(x)$	2	$\nearrow$	4

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1°) Montrer que pour tout $n \in IN$, on a : $1 \leq u_n \leq 5$.

2°) Montrer que pour tout $n \in IN$, on a : $u_n \leq u_{n+1}$

3°) En déduire que (u_n) est convergente vers une limite ℓ .

4°) On suppose que pour tout $n \in IN$, $\left|u_n - \frac{5}{2}\right| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$,déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

EX 7

Soit la suite U définie sur IN par :

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{2} + \frac{2}{U_n} ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,on a : $U_n > 2$.

2°) a- Montrer que la suite U est décroissante.
b- En déduire qu'elle est convergente.
c- Déterminer sa limite.

3°) a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,on a :

$$U_{n+1} - 2 < \frac{1}{2}(U_n - 2).$$

b- En déduire que : $U_n - 2 < \frac{1}{2^n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

c- Retrouver alors les résultats de2°) b-.

EX 7

On considère la suite (U_n) définie par

$U_n = \frac{3^n}{n!}$ pour tout $n \geq 3$

1. Montrer que $U_n > 0$ pour tout $n \geq 3$.
2. On définit la suite V définie par
3. $V_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}$ pour tout $n \geq 3$

a- Exprimer V_n en fonction de n.

b – Prouver que pour tout $n \geq 3$, $V_n \leq \frac{3}{4}$

c- En déduire que (U_n) est convergente

3. a – Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 3$,

$U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} U_3$.

b – En déduire que pour tout $n \geq 3$,

$U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{32}{3}$.

c – Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

EX 8

Soit (b_n) la suite définie par : $\begin{cases} b_0 = 0 \\ b_{n+1} = \frac{1+b_n}{\sqrt{3+b_n^2}} ; n \in IN \end{cases}$

1°) Montrer que $\forall n \in IN$,on a : $0 \leq b_n < 1$.

2°) a- Montrer que $\forall n \in IN$,on a : $b_{n+1} > \frac{1+b_n}{2}$.

b- Déduire les variations de la suite (b_n).

c- Montrer que (b_n) est convergente.

3°) Montrer que $\forall n \in IN$,on a : $0 < 1 - b_{n+1} \leq \frac{1}{2}(1 - b_n)$.

4°) Déterminer la limite de la suite (b_n).

EX 8

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$

par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{2} + 3 ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1/a) Montrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n < 6$.

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c) En déduire que (u_n) est convergente et trouver sa limite.

2/ Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = U_n - 6$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme V_0.

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

c) Retrouver la limite de (u_n)