I) Rappels

1) Définition

On appelle suite réelle ou suite numérique toute application **u** d'une partie **I** de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
Si I est fini la suite est dite finie.
Sinon, la suite est infinie et ça sera l'objet du cours.
Dans la suite, on prendra $I=\{n\in\mathbb{N}, n\geq n_0\}$, n_0 étant le rang initial de la suite.

2) Notation indicielle.

Soit $n\in I$, l'image u(n) de n par la suite u est notée u_n.
On dit que u_n est le terme d'indice n de la suite u.

3) Symboles $\sum$ et $\prod$

a) Définition

Soit u la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$, on convient de poser $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{i=0}^{n} u_i = \sum_{p=0}^{n} u_p = u_0+u_1+\ldots+u_n$ et

$$\prod_{k=0}^{n} u_k = u_0\times u_1\times\ldots\times u_n$$

b) Propriétés

Soient u et v deux suites réelles définies sur $\mathbb{N}$ et α un réel. On a :

$$\sum_{k=0}^{n}(u_k+v_k)=\sum_{k=0}^{n}u_k+\sum_{k=0}^{n}v_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n}\alpha u_k=\alpha\sum_{k=0}^{n}u_k$$

En particulier $\sum_{k=0}^{n}\alpha=\alpha\sum_{k=0}^{n}1=(n+1)\alpha$.

$$\prod_{k=0}^{n}\alpha u_k=\alpha^{n+1}\prod_{k=0}^{n}u_k$$

4) Techniques permettent l'étude de la monotonie d'une suite :

<u>**La technique fonctionnelle**</u>

Elle s'applique aux suites de la forme $u_n=f(n)$ et consiste à étudier les variations de f sur $[n_0;+\infty[\cap I$ Le sens de variation de (u_n) s'en déduit.

<u>**Les techniques algébriques**</u>

Elles consistent à comparer directement u_n et u_{n+1} :
soit en étudiant le signe de la différence $u_{n+1}-u_n$;
soit en comparant $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 si, $\forall n, u_n>0$ ou $u_n<0$.

<u>**Le raisonnement par récurrence ou l'étude du signe de f(x)-x (voir exercices de la série)**</u>

5) Principe de raisonnement par récurrence

Soit $\mathscr{P}$ une propriété dépendant de n, $n\in\mathbb{N}$, et n_0 un entier naturel donné.
Pour montrer que $\mathscr{P}$ est vraie pour tout n, $n\geq n_0$, il suffit de vérifier que:

1. $\mathscr{P}$ est vraie pour $n=n_0$ (initialisation)
2. Si $\mathscr{P}$ est vraie pour $n=p$ (ou jusqu'à $n=p$), $p\geq n_0$, Alors $\mathscr{P}$ est vraie pour $n=p+1$ (hérédité ou transmission)

II) Suite majorée, minorée, bornée :

Soit $I=\{n\in\mathbb{N}, n\geq n_0\}$. On désigne par U une suite définie sur I.

- U est dite <u>majorée</u> s'il existe un réel M tel que, pour tout $n\in I, U_n\leq M$.
- U est dite <u>minorée</u> s'il existe un réel m tel que, pour tout $n\in I, U_n\geq m$.
- U est dite <u>bornée</u> si elle est à la fois majorée et minorée (pour tout $n\in I, m\leq U_n\leq M$)
- $M=$ Majorant, $m=$ Minorant.
- M et m sont indépendants de n.

Remarques :

- Toute suite croissante est minorée par son premier terme.
- Toute suite décroissante est majorée par son premier terme.
- u est bornée si et seulement il existe $A\in\mathbb{R}_+$ tel que $\forall n\in I, |u_n|\leq A$.

III) Suites convergentes- Suites divergentes

1) Définition :

Une suite est convergente si et seulement si elle admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.

Remarques :

1) $\lim_{n\to+\infty} u_n=\ell \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}(u_n-\ell)=0$.
2) Une suite divergente est une suite non convergente.
3) Si une suite admet une limite alors cette limite est **unique**.

2) Suites convergentes et suites bornées

Théorème :

Toute suite convergente est bornée.
- La réciproque est fausse.

La suite de terme général $(-1)^n$ est bornée mais divergente.

3) Limites et valeurs absolues

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|$

Il se peut que la suite $(|u_n|)$ soit convergente sans pour autant avoir (u_n) convergente. C'est le cas de $(-1)^n$

4) Critère de convergence d'une suite monotone

Théorème :

1) Une suite croissante et majorée est convergente.
(tous les termes sont inférieurs à la limite)

2) Une suite décroissante et minorée est convergente
(tous les termes sont supérieurs à la limite)

5) Critère de divergence d'une suite monotone

Théorème :

1) Une suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.

2) Une suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$

Remarques:

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante.

a) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par un réel M alors elle converge vers un réel ℓ et on a $\mathbf{u_0 \leq \ell \leq M}$

b) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non majorée alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante.

a) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par un réel m alors elle converge vers un réel ℓ et on a $\mathbf{m \leq \ell \leq u_0}$.

b) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non minorée alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

6) Critère de convergence d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme non nul et de raison non nulle q.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente (vers 0) si et seulement si $-1 < q < 1 \Leftrightarrow |q| < 1$.

7) Critère de divergence d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme non nul et de raison non nulle q.

- Si $u_0 > 0$ et $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Si $u_0 < 0$ et $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
- Si $q \leq -1$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Résultat
(souvent rencontré dans les exercices)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme non nul et de raison non nulle q.

$S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k$

Si $|q| < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{u_0}{1-q}$.

8) Règles de comparaison

	1ère hypothèse à partir d'un certain rang	2ème hypothèse comportement en $+\infty$	Conclusion
Th1	$u_n \geq 0$ ou $u_n > 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell\ (\ell \in \mathbb{R})$	$\ell \geq 0$
Th2	$u_n \leq 0$ ou $u_n < 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell\ (\ell \in \mathbb{R})$	$\ell \leq 0$
Th3	$u_n \leq v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell\ (\ell \in \mathbb{R})$ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'\ (\ell' \in \mathbb{R})$	$\ell \leq \ell'$
Th4	$\lvert u_n\rvert \leq \lvert v_n\rvert$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
Th5	$v_n \leq u_n \leq w_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$
Th6	$a \leq u_n \leq b$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$	$a \leq \ell \leq b$
Th7	$\lvert u_n - \ell\rvert \leq v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$
Th8	$u_n \geq v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
Th9	$u_n \leq v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

9) Image d'une suite par une fonction :

Théorème :

Soient f une fonction définie sur un intervalle ouvert J de centre a et (u_n) une suite à valeurs dans J. Si (u_n) converge vers a et f continue en a alors la suite $(f(u_n))$ converge vers f(a)

Théorème :

Soient f une fonction définie sur un intervalle ouvert J de centre ℓ sauf peut être en ℓ et (u_n) une suite à valeurs dans J \ { ℓ }

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = L$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = L$

Remarque : ℓ et L sont finis ou infinis.

Conséquence

Si f est une fonction telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = \ell$

Suites récurrentes : $u_{n+1} = f(u_n)$

Théorème « du point fixe »
Soit f une fonction définie sur un intervalle J et $(u_n)_{n\in I}$

$$\text{Si } \begin{cases} \forall n \in I, u_{n+1} = f(u_n) \\ \forall n \in I,\ u_n \in J \\ (u_n) \text{ cvg vers } \ell \in J \\ f \text{ est continue sur } J \end{cases} \quad \text{alors } f(\ell) = \ell$$

Remarque :

- ℓ est une solution de l'équation $f(x) = x$.
- ℓ est l'abscisse d'un point d'intersection entre la courbe représentative de f et la droite $\Delta : y = x$.

10) Limites et opérations sur les suites

Les théorèmes concernant les limites des sommes, produits et quotients de suites sont les mêmes que ceux relatifs aux fonctions numériques.

Bonne révision