EX 1 **Vrai ou Faux ?** justifier la réponse.

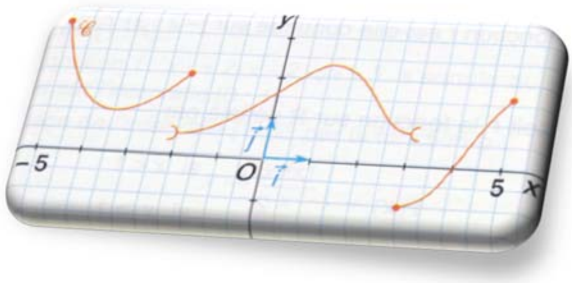
1°) Si f définie en x_0 alors f est continue en x_0.

2°) Si f continue sur $]a; x_0[$ et f continue sur $[x_0; b[$ alors f est continue en x_0

3°) f est continue en x_0 alors $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

EX 2 **Vrai ou Faux ?** justifier la réponse.

On a tracé la courbe représentative d'une fonction définie [-5 ;5]



Par lecture graphique, dire si les proposition suivante sont **vraies ou fausses** ?

1°) La fonction f est discontinue en 3.

2°) La fonction f est continue en -1.

3°) La fonction f est continue sur l'intervalle [-5 ;5].

4°) La fonction f est continue sur l'intervalle]-2 ;2].

5°) La fonction f est continue sur [-5 ;-2].

EX 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = (x-1)\sin\left(\dfrac{1}{x-1}\right) + 1 & \text{Si } x < 1 \\ f(x) = \dfrac{x^2+2x}{2x+1} & \text{Si } x \geq 1 \end{cases}$$

1) a – Montrer que pour tout $x < 1$, on a : $x \leq f(x) \leq 2 - x$.

b – Etudier la continuité de f en 1.

2) Montrer que la droite $D : y = 2$ est une asymptote à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

3) Etudier la nature de la branche infinie à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

EX 4

Soit f une fonction continue et dérivable sur son ensemble de définition, son tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f(x)	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	7

1) Donner dans chaque cas <u>le nombre</u> de solutions de l'équation : f(x) = 0 , f(x) = 10 , f(x) = 5 et f(x) = -1

2) Déterminer en justifiant les réponses les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) ,\ \lim_{x\to +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) ;\ \lim_{x\to -\infty} f\left(\frac{x+1}{3-x}\right) \text{et } \lim_{x\to +\infty} f(1-x^2)$$

EX 5

Soit la fonction f définie par

$$\begin{cases} f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2-1} & \text{si } x > 1 \\ f(x) = x^3 + 3x - 2 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f et calculer les limites de f en $(+\infty)$ et $(-\infty)$

2) Montrer que f est continue sur IR

3) a) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α dans] -1,1[

b) Vérifier que $0,5 < \alpha < 0,75$

c) Déterminer le signe de f(x) sur] -1,1[

EX 6

Dans le graphique ci-dessous, on a représenté la courbe (C_f) d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$. La droite $\Delta : y = x$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$, la droite $y = 1$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$ et l'axe des ordonnées est une asymptote à (C_f) à droite et à gauche en 0.

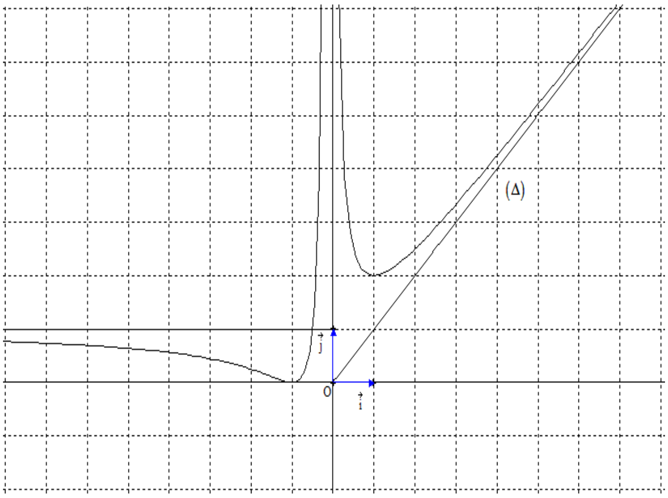
Utiliser le graphique pour répondre.

1. Déterminer

$$\lim_{x\to+\infty} f(x),\ \lim_{x\to+\infty} (f(x) - x),\ \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x},\ \lim_{x\to-1} \frac{1}{f(x)} \text{ et}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)\sin\left(\frac{1}{f(x)}\right)$$

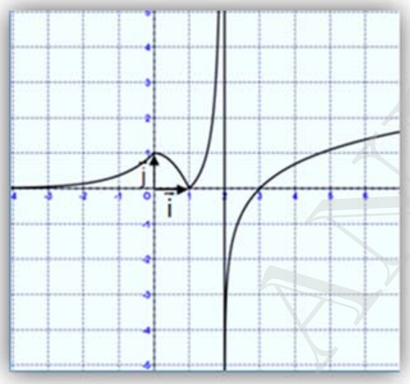
2. Déterminer $f(]-\infty,-1])$, $f([-1,0[)$ et $f(]0,1])$
3. Montrer que la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{\dfrac{1}{f(x)}}$ est continue sur $\mathbb{R}^* \setminus \{-1\}$
4. La fonction g admet-elle un prolongement par continuité en 0 ?



EX 7

La figure ci-dessous est la représentation graphique $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. d'une fonction f définie et continue sur $IR\setminus\{2\}$.

- La droite des abscisses est une asymptote horizontale de c au voisinage de $-\infty$.
- La droite $D : x = 2$ est une asymptote verticale pour $\mathscr{C}$.
- $\mathscr{C}$ admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de l'axe des abscisses.



I- 1) Déterminer

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$.

2) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f\circ f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{1-3x}{-x+2018}\right)$.

3) Déterminer $f([0;1])$ et $f(]2;+\infty[)$.

II- Soit g la fonction définie et continue sur $IR\setminus\{1\}$ et dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
g(x)	2 ↘	$-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	1

1°) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (fog)(x)$.

2°) Soit h une fonction définie sur $IR\setminus\{1\}$ et telle que $\dfrac{2x}{x-1} < h(x) \le g(x)$ pour $x<1$

Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^-} h(x)$.

3°) gof est-elle continue en 0 ? Justifier.

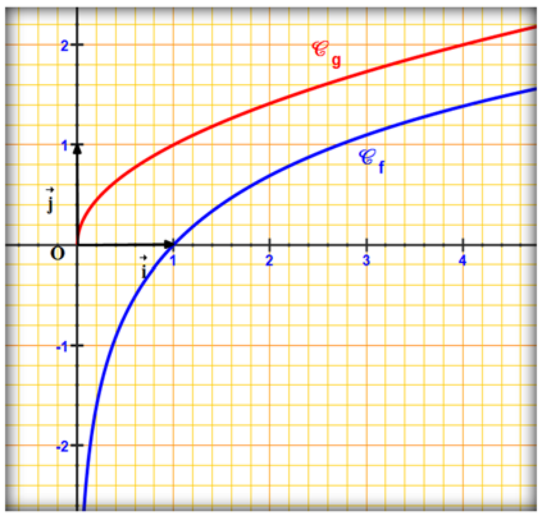
EX 8

Dans la figure ci-dessous, on donne :

- $\mathscr{C}_g$ la courbe representative de la fonction : $x \mapsto \sqrt{x}$
- $\mathscr{C}_f$ la courbe representative de la fonction f définie sur IR_+^*
- la droite des ordonnées est une asymptote à $\mathscr{C}_f$.

On admettra les resultats suivants :

(1) Pour tout $x>0$, $\mathscr{C}_f$ est au dessous $\mathscr{C}_g$;
(2) pour tout $x>1$, $\mathscr{C}_f$ est au dessus de l'axe des abscisses ;
(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. **(4)** pour tout $x>0$, $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$



1°) Déterminer, en justifiant les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$; **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$; **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{f(x)}$

2°) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} x\,f(x) = 0$.

b) Que vaut $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x\,f(x)}$.

3°) Déterminer lorsqu'elles existent les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to0^+} x\,f(\sin x)$. **b)** $\lim\limits_{x\to\pi^-} (x-\pi)\,f(\sin x)$.