Direction régionale de l'éducation : Tunis 1	**Devoir de Contrôle n° : 1** **Mathématiques**	Année scolaire 2018/2019
Lycée : El Montazeh El Mourouj 2	Durée : 2H	Classe : 4 ème Sc-Exp 2
Mr : Gary Badreddine	Date : 06/11/2018	Coefficient : 3

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4 , L'annexe est à rendre avec la copie.

NB : il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.

Exercice n°: 1 (6 pts)

Soit deux réels θ et θ' de $]0\,;\pi[$.

1. A. Montrer que : $z_1 = 1 + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$ et

$$z_2 = e^{i\theta} + e^{i\theta'} = 2\cos\left(\frac{\theta' - \theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta' + \theta}{2}\right)}.$$

   B. En déduire le module et l'argument de z_1 et z_2 .

   C. Vérifier que : $1 + e^{i\frac{\pi}{12}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)e^{i\frac{\pi}{24}}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)e^{i\left(\frac{7\pi}{24}\right)}$.

2. A. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)e^{i\left(\frac{7\pi}{24}\right)}z + e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)} = 0$.

   B. Donner la forme algébrique de chacune de ces solutions.

3. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

   On donne les points A,B et C d'affixes respectives $z_A = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_B = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $z_C = z_A + z_B$.

   A. Montrer que le quadrilatère $OACB$ est un losange.

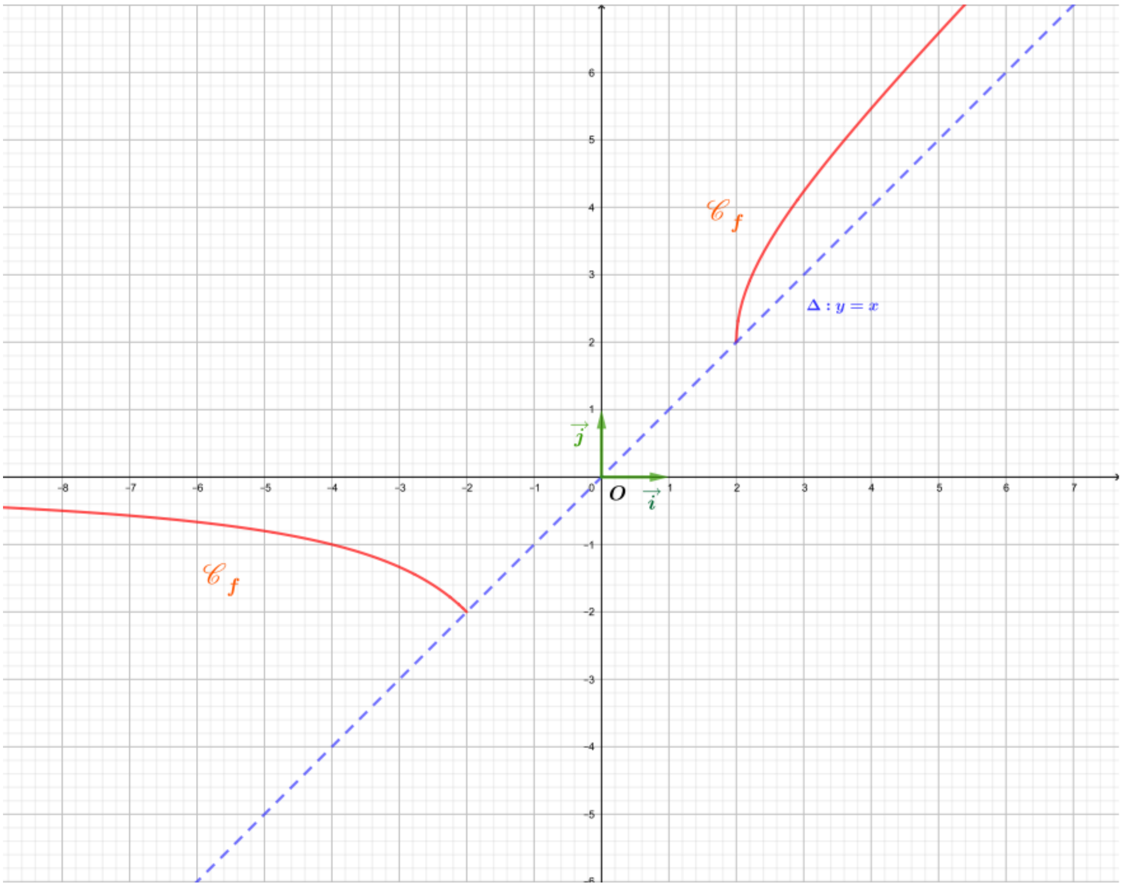
   B. Calculer OC.

   C. En déduire alors $\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)$.

Exercice n°: 2 (5 pts)

Dans l'annexe ci – jointe ,on donne $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative d'une fonction f définie sur $]-\infty\,;2] \cup [2\,;+\infty[$.

- La droite $\Delta : \boldsymbol{y = x}$ est une direction asymptotique à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $(+\infty)$.
- L'axe des abscisses est une asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $(-\infty)$.



Par lecture graphique :

1. Déterminer les limites suivantes :

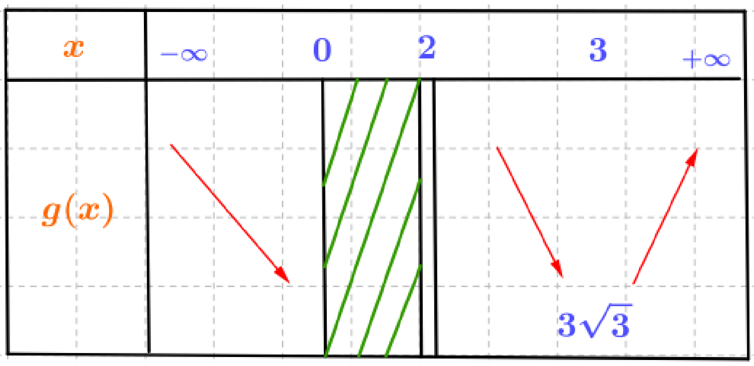
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \;;\; \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \;;\; \lim_{x\to+\infty} (\,f(x) - x) \;\; et \;\; \lim_{x\to+\infty} \frac{x - x^3 f(x)}{x^4+1}\,.$$

2. **A.** Déterminer $f([2\,;+\infty[)$.

B. Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique $\alpha \in\,]2\,;3[$.

3. Soit g la fonction définie et continue sur $]-\infty\,;2] \cup [2\,;+\infty[$ par : $g(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$ et $(\mathcal{C}_g)$ sa représentative.

➢ On donne ci –dessous le tableau **(incomplet)** de la fonction g.



A. Compléter le tableau de variation de g et déterminer les branches infinies de $(\mathcal{C}_g)$.

B. Montrer que l'équation $g(x) = 2$ admet une solution unique $\beta \in]-3, -2[$.

Exercice n°: 3 (7 pts)

On considère la fonction f définie sur [0 ; 1] par : $f(x) = \frac{3x+2}{x+4}$.

1. A. Montrer que : $\forall\, x \in [0\,;1]\;\; f(x) = 3 - \frac{10}{x+4}$.

   B. Etudier les variations de f et en déduire que $\forall\, x \in [0\,;\,1]$, $f(x) \in [0\,;\,1]$.

2. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ et \\ u_{n+1} = f(u_n) = \frac{3u_n+2}{u_n+4} \end{cases}$.

   Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0\,;\,1]$.

3. A. Montrer que : $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$.

   B. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

   C. Démontrer que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite .

4. On considère la suite (v_n) définie par : $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$.

   A. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$.

   B. Calculer v_0 et exprimer v_n en fonction de n .

   C. Exprimer u_n en fonction de v_n puis en fonction de n .

   D. Déterminer la limite de la suite u_n.

Exercice n°: 4 (2 pts)

QCM : Cocher la réponse exacte

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte.

Aucune justification n'est demandée.

1. Le nombre complexe $-5+5i\sqrt{3}$ a pour argument :

a. $\frac{\pi}{3}$ b. $-\frac{\pi}{3}$ c. $\frac{2\pi}{3}$ d. $\frac{4\pi}{3}$

2. On pose $z = -e^{i\frac{\pi}{3}}$ alors :

a. $|z| = -1$ b. $\bar{z} = -e^{-i\frac{\pi}{3}}$ c. $\arg(z) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ d. $z^3 = -1$

3. Soit z un nombre complexe non nul et z' défini par $z' = -\frac{3}{\bar{z}}$ où $\bar{z}$ est le conjugué de z .Pour tout $z \neq 0$.

a . $\arg(z') \equiv \arg(z)\ [2\pi]$ b. $\arg(z') \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$

c. $\arg(z') \equiv \arg(z) + \pi\ [2\pi]$ d. $\arg(z') \equiv 3\arg(z)\ [2\pi]$

4. (u_n) , (v_n) et (w_n) sont trois suites réelles telles que (u_n) est croissante , (v_n) est décroissante .On suppose de plus que , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$ .On peut alors affirmer que :

a . (u_n) diverge b. (u_n) *et* (v_n) sont adjacentes

c. (v_n) converge d. (w_n) converge

Le page 4 / 4 <u>à rendre avec les copies.</u>

Nom :	**Prénom :**