REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

DEVOIR DE CONTRÔLE N°1

Section : 4ème année sciences expérimentales

MATHEMATIQUES **2 heures**

Lycée Radhia Hadded
ANIS BEN ALI
Novembre 2018

Le sujet comporte 4 pages numérotées de (1sur 4) à (4sur 4). Les pages (3sur 4) et (4sur4) sont à rendre avec la copie

EXERCICE N°1 (8 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1+\sqrt{x}\cos x}{x+2} & si\ \ x\geq 0 \\ f(x)=\dfrac{x^2}{4(\sqrt{x^2+1}-1)} & si\ \ x<0 \end{cases}$

1°) a) Montrer que f est continue en 0.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\dfrac{\cos^2 x}{4(\sqrt{\cos^2 x+1}-1)}$.

2°) a) Montrer que pour tout réel x positif, on a : $\dfrac{1-\sqrt{x}}{x+2}\leq f(x)\leq\dfrac{1+\sqrt{x}}{x+2}$.

b) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

3°) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution α dans $\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$.

4°) La courbe ci-jointe **(Figure 1-page 4)** représente une fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ et qui admet la droite $D: y=1$ comme asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$ et une branche parabolique de direction (Oy) au voisinage de $-\infty$.

a) A l'aide d'une lecture graphique :

i) Dresser le tableau de variation de g et préciser $g(\mathbb{R})$

ii) Prouver que l'équation $g(x)=\alpha$ admet une unique solution β dans $\mathbb{R}$.

b) i) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g\circ f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f\circ g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2018^-} g\left(\dfrac{3x}{2018-x}\right)$.

ii) Démontrer que $\tan(g(\beta))=-\sqrt{\alpha-1}$.

EXERCICE N°2 (7 points)

I– On considère, dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation $(E) : \frac{1}{4}z^2 - \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}z - i = 0$.

1°) Vérifier que : $z_1 = \left(2\sqrt{2}+2\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$ est une solution de l'équation (E).

2°) Déterminer alors l'autre solution z_2 de l'équation (E) puis vérifier que : $z_2 = \left(2\sqrt{2}-2\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

II– Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. **(Figure 2)**

Soit A le point d'affixe $z_A = 2+2i$ et Γ le cercle de centre A et de rayon 2.

La droite (OA) coupe Γ en deux points H et K tels que $OH < OK$.**(Figure 2)**

1°) Montrer que : $Z_H = \left(2\sqrt{2}-2\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_k = \left(2\sqrt{2}+2\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$.

2°) A tout M du plan d'affixe $z \neq 0$, on associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \frac{-4}{z}$.

a) Montrer que pour tout point M distinct de O on a : $OM \times OM' = 4$.

b) Montrer que pour tout point M distinct de O on a : $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM'}}\right) \equiv \pi - \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)[2\pi]$.

3°) Soient $z_{H'}$ et $z_{K'}$ les affixes respectives de H' et K' tels que : $z_{H'} = \frac{-4}{z_H}$ et $z_{K'} = \frac{-4}{z_K}$.

a) Montrer que $Z_{H'} = \left(2\sqrt{2}+2\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $Z_{K'} = \left(2\sqrt{2}-2\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

b) Construire les points H' et K'. (Justifier).

EXERCICE N° 3 (5 points)

Dans la figure ci-jointe **(Figure 3)**, $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ est un repère orthonormé direct du plan et A un point du cercle de centre O et de rayon 2 tel que $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OA}}\right) \equiv \theta\,[2\pi]$ où $\theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ .On désigne par a l'affixe du point A.

1°) Donner, à l'aide de θ, l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes :

$$a\ ;\ -\frac{1}{\bar{a}} \text{ et } \frac{a^2}{\bar{a}}$$

2°) Construire sur l'annexe les points B et C d'affixes respectives $-\frac{1}{\bar{a}}$ et $\frac{a^2}{\bar{a}}$

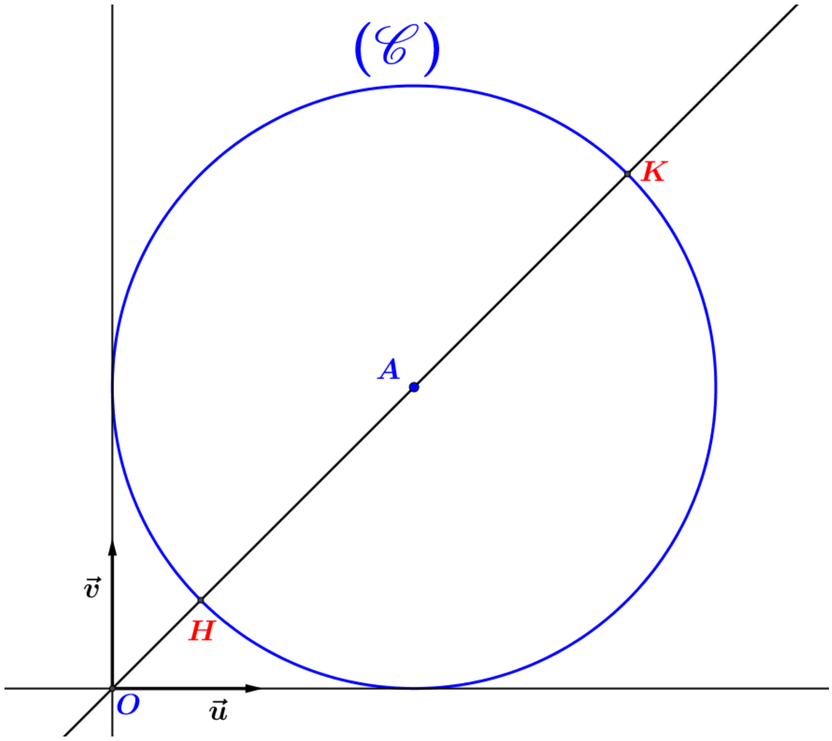
3°) a) Vérifier que $\frac{z_B - z_A}{z_C} = -\frac{5}{4}e^{-2i\theta}$

b) En déduire la valeur de θ pour laquelle les droites (AB) et (OC) sont perpendiculaires.

ANNEXE
À RENDRE AVEC LA COPIE

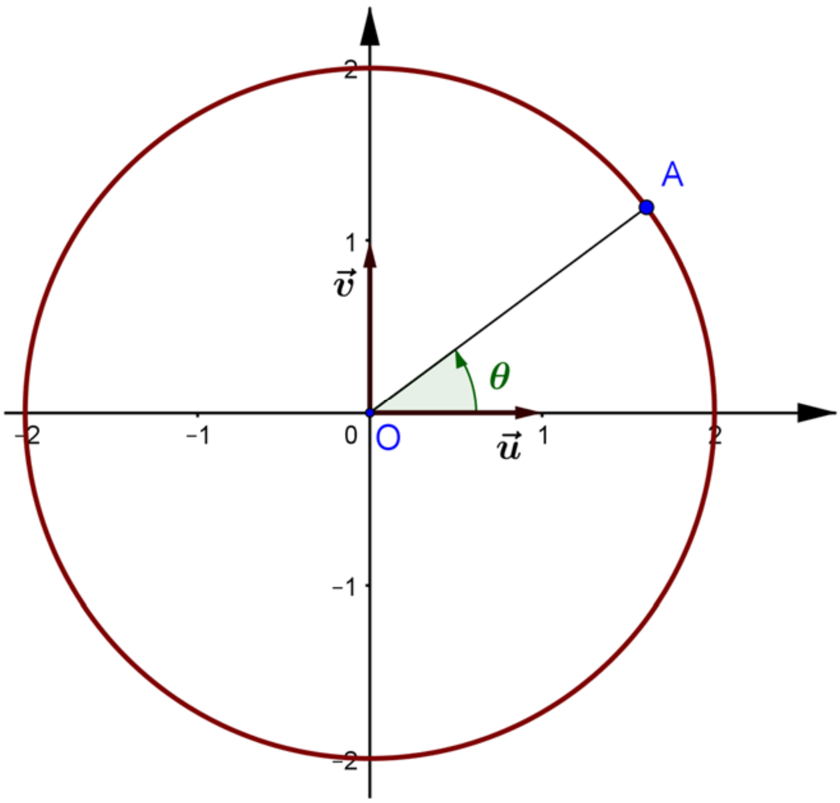
NOM…………………………… PRENOM………………………N°………

EXERCICE N°2



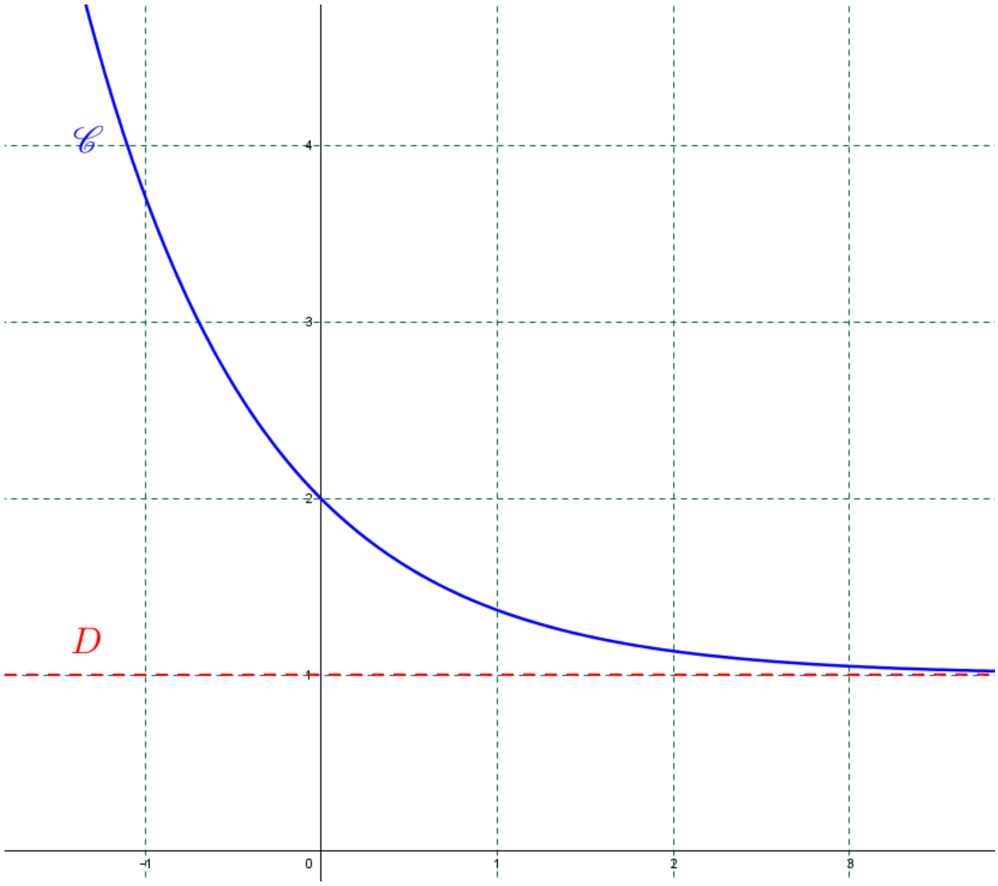
(Figure 2)

EXERCICE N°3



(Figure 3)

EXERCICE N°1



(Figure 1)