

**Exercice 1 : ( 5 points)**

La probabilité que le train parte à temps du dépôt des locomotives est 0,85 , la probabilité qu'il parte à temps du dépôt et arrive à temps à une station est 0,75 et la probabilité qu'il arrive à temps à une station est 0,76.

On considère les évènements suivants :

A : « le train arrive à temps à une station » et B : « le train part à temps du dépôt »

1. Déterminer la probabilité de chacun des évènements A, B et  $A \cap B$ .

2. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

E : « le train arrive à temps à une station sachant qu'il est parti à temps du dépôt »

F : « le train ne part pas à temps du dépôt et arrive à temps à une station ».

3. Pour se rendre au lycée le matin, un élève prend le train.

Quelle est la probabilité pour que cet élève arrive en retard au plus une fois pendant les six jours de la semaine ?

**Exercice 2 : ( 7 points)**

Une urne contient quatre boules noires et une boule blanche.

Un jeu se déroule de la manière suivante :

Le joueur jette un dé parfait ;

✓ Si le numéro de la face supérieure du dé est impair, alors une boule blanche est ajoutée à l'urne,

✓ Si le numéro de la face supérieure du dé est pair, alors une boule noire est ajoutée à l'urne,

ensuite le joueur tire simultanément, et au hasard, trois boules de l'urne.

On considère les évènements suivants :

I : « le numéro de la face supérieure du dé est impair »

N : « les trois boules tirées sont noires »

1. Calculer les probabilités  $p(N|I)$  et  $p(N \cap I)$  puis vérifier que  $p(N) = \frac{7}{20}$ .

2. Les trois boules tirées sont noires. Quelle est la probabilité que le numéro de la face supérieure du dé est pair ?
3. On désigne par  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées lors de ce jeu.
  - a) Montrer que  $p(X = 1) = \frac{11}{20}$ .
  - b) Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .
4. Estimer le nombre moyen de boules blanches tirées lors d'un jeu.

**Exercice 3 : (8 points)**

Soit  $f_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f_n(x) = \frac{2e^{nx}}{1 + e^x} - 1$ , où  $n$  est un entier naturel, et  $(C_n)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**A-** Dans cette partie on prend  $n = 1$

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x)$ .
2. Calculer  $f_1'(x)$  et dresser le tableau de variations de  $f_1$ .
3. a) Démontrer que  $O$  est un point d'inflexion de  $(C_1)$ .  
b) Ecrire une équation de la tangente  $(T)$  en  $O$  à  $(C_1)$ .
4. Tracer  $(T)$  et  $(C_1)$ .

**B-** Soit  $(C_0)$  la courbe représentative de la fonction  $f_0$ , correspondant à  $n = 0$ ,

dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Démontrer que  $(C_0)$  est symétrique de  $(C_1)$  par rapport à l'axe des abscisses.
2. Tracer  $(C_0)$ .
3. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les courbes  $(C_1)$ ,  $(C_0)$  et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 1$ .

**C-** Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ .

1. Démontrer que  $u_{n+1} + u_n = 2 \frac{e^n - n - 1}{n}$ .
2. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} + u_n)$  et en déduire que la suite  $(u_n)$  ne peut pas être convergente.