L. IBN RACHIK – Ezzahra Mr ABIDI Farid	Devoir de synthèse n°1(Mars 2019) Mathématiques	Classes : 4 SE 3 Durée : 3 h

Le sujet se compose de 4 pages numérotées 1/4, 2/4 , 3/4 et 4/4.

La page 4/4 est à compléter et à rendre avec la copie.

Exercice 1: (6 points)

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Montrer que pour tout $x\geq 0$, $f'(x)=\dfrac{(x+2)e^{-x}-1}{\left(x+e^{-x}\right)^2}$.

2. Dans le plan rapporté à le repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les courbes Γ_1 et Γ_2 représentatives des fonctions g et h définies sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=(x+2)e^{-x}-1$ et $h(x)=\dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$.

Γ_1 coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse α. Voir annexe ci-jointe à la page 4/4.

a) Montrer que $f'(x)=0$ si et seulement si $x=\alpha$. Donner le signe de $f'(x)$ sur $[0,+\infty[$.

b) Montrer que $f(\alpha)=h(\alpha)$.

c) En déduire une construction du point B de coordonnées $(\alpha,f(\alpha))$.

3. a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Tracer (C) dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ dans l'annexe ci-jointe.

4. On pose pour tout entier $n\geq 2$, $a_n=\displaystyle\int_n^{n+1} f(x)dx$.

a) Montrer que, pour tout x de $[n,n+1]$, $f(n+1)\leq f(x)\leq f(n)$ et en déduire que $f(n+1)\leq a_n\leq f(n)$.

b) En déduire que la suite (a_n) est décroissante.

c) Montrer que la suite (a_n) est convergente et préciser sa limite.

Exercice 2: (6 points)

On considère les fonctions f et g définies sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=2x-2+\frac{1-\ln x}{x}$ et $g(x)=2x^2-2+\ln x$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1. a) Montrer que g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

   b) Calculer g(1) et déduire, suivant les valeurs de x, le signe de g(x).

2. a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et déduire une asymptote à (C).

   b) Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, prouver que la droite (D) d'équation $y=2x-2$ est une asymptote à (C) et étudier la position relative de (C) et (D).

3. a) Vérifier que pour tout réel x > 0, $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

   b) Dresser le tableau de variation de f.

4. Tracer (C) et (D).

5. On pose pour tout entier naturel, $u_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\left(f(x)-2x+2\right)dx$.

   a) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n=\frac{1}{2}-n$.

   b) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) , la droite (D) et les droites d'équations x = 1 et x = e^2.

   Montrer que $A=u_0-u_1$ puis calculer A.

Exercice 3 : (8 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on donne :

- Le plan (P) dont une équation cartésienne est $x+y-z+2=0$.
- la droite (Δ) dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=-t+2 \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

1. a) Déterminer les réels a, b et c pour lesquels les points A(a, –2, 1) , B (2, b, 3) , C(1,1, c) appartiennent au plan (P).

   b) Calculer l'aire du triangle ABC.

2. a) Démontrer que la droite (Δ) est perpendiculaire au plan (P) en H(0, 0, 2).

   b) Démontrer que H est équidistant de A, B et C.

3. a) Déterminer le point I de la droite (Δ) d'abscisse strictement positive telle que $IH = \sqrt{3}$.

   b) Soit (S) la sphère de centre I et rayon 3. Préciser l'intersection de (P) et (S).

4. Soit E le point la droite (Δ) de côte nulle.

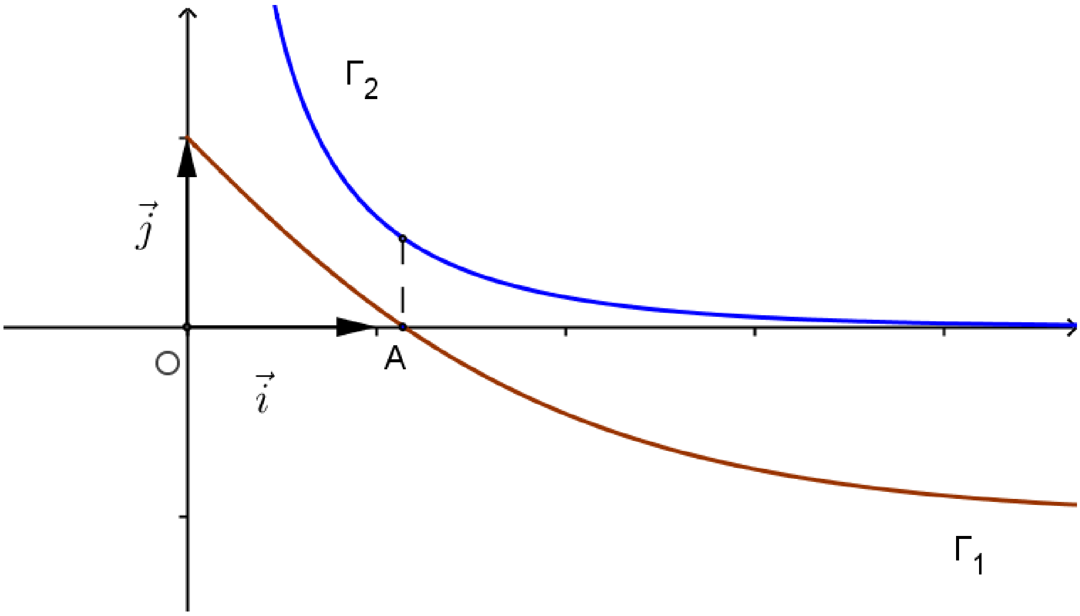
   a) Donner les coordonnées de E puis calculer le volume du tétraèdre EABC.

   b) Soit t un réel différent de 2 et $M(t, t, -t+2)$ un point variable de (Δ).

Pour quelles valeurs de t, le volume du tétraèdre MABC est-il égal au double de celui de EABC ?

Annexe à compléter et à rendre avec la copie

Nom de l'élève : ………………………………………………….



Exercice 1:

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan.

1.a) $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{1}{e^{x}}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x+e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x+\dfrac{1}{e^{x}}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}=0$.
La droite des abscisses est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

b) Pour tout $x \geq 0$, $f'(x)=\dfrac{e^{-x}\left(x+e^{-x}\right)-e^{-x}\left(1+e^{-x}\right)^{2}}{\left(x+e^{-x}\right)^{2}}=\dfrac{xe^{-x}+e^{-2x}-1+2e^{-x}-e^{-2x}}{\left(x+e^{-x}\right)^{2}}$

$$=\frac{(x+2)e^{-x}-1}{\left(x+e^{-x}\right)^{2}}.$$

2. a) $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+2)e^{-x}-1}{\left(x+e^{-x}\right)^{2}}=0 \Leftrightarrow (x+2)e^{-x}-1=0 \Leftrightarrow g(x)=0 \Leftrightarrow x=\alpha$.

Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ sur $[0,+\infty[$

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	
$f'(x)$		+	0	-	

b) $f(\alpha)-h(\alpha)=\dfrac{1-e^{-\alpha}}{\alpha+e^{-\alpha}}-\dfrac{e^{-\alpha}}{1-e^{-\alpha}}=\dfrac{\left(1-e^{-\alpha}\right)^{2}-e^{-\alpha}\left(\alpha+e^{-\alpha}\right)}{\left(\alpha+e^{-\alpha}\right)\left(1-e^{-\alpha}\right)}=\dfrac{1-(\alpha+2)e^{-\alpha}}{\left(\alpha+e^{-\alpha}\right)\left(1-e^{-\alpha}\right)}$

$=-\dfrac{g(\alpha)}{\left(\alpha+e^{-\alpha}\right)\left(1-e^{-\alpha}\right)}=0$ donc $f(\alpha)=h(\alpha)$.

c) $B(\alpha,f(\alpha))\in(C)$ donc $B(\alpha,h(\alpha))\in\Gamma_2$. Ainsi la perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par A coupe la courbe Γ_2 en B.

3. a) Le tableau de variation de f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
f	0	↗	$f(\alpha)$	↘	0

b) Voir figure sur annexe .

4. On pose pour tout entier $n \geq 2$, $a_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$.

a) Soit n un entier tel que $n \geq 2$, f est strictement décroissante sur [n, n+1] donc , si $n \leq x \leq n+1$ alors $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$.

D'où $\int_n^{n+1} f(n+1)dx \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq \int_n^{n+1} f(n)dx$

donc $f(n+1)(n+1-n) \leq a_n \leq f(n)(n+1-n)$ donc $f(n+1) \leq a_n \leq f(n)$.

b) On a $f(n+1) \leq a_n \leq f(n)$ et $f(n+2) \leq a_{n+1} \leq f(n+1)$ donc $a_{n+1} \leq f(n+1) \leq a_n$.

D'où la suite (a_n) est décroissante.

c) Pour tout $n \geq 2$, et pour tout $x \in [n, n+1]$, $f(x) > 0$ donc $a_n = \int_n^{n+1} f(x)dx \geq 0$.

Ainsi , la suite (a_n) est décroissante et minorée par 0 donc (a_n) est convergente.

Pour tout $n \geq 2$, $f(n+1) \leq a_n \leq f(n)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n+1) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Exercice 2:

On considère les fonctions f et g définies sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = 2x - 2 + \frac{1-\ln x}{x}$ et $g(x) = 2x^2 - 2 + \ln x$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1.a) g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout x > 0, $g'(x) = 4x + \frac{1}{x} > 0$ donc g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

b) $g(1) = 2 - 2 + \ln 1 = 0$.

Si $0 < x < 1$ alors $g(x) < g(1)$ donc $g(x) < 0$

Si $x > 1$ alors $g(x) > g(1)$ donc $g(x) > 0$.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	

2.a) $\lim\limits_{x\to 0^+} 2x-2=-2$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\ln x}{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 2x-2+\dfrac{1-\ln x}{x}=+\infty$.

Donc l'axe des ordonnées est une asymptote à (C).

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} 2x-2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln x}{x}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)-(2x-2)=\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln x}{x}=0$ donc la droite (D) d'équation $y=2x-2$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

x	0		e		$+\infty$
1- lnx		+	0	-	
$f(x)-(2x-2)$		+	0	-	
Position de (C) par rapport à (D)	Au -dessus			Au- dessous	

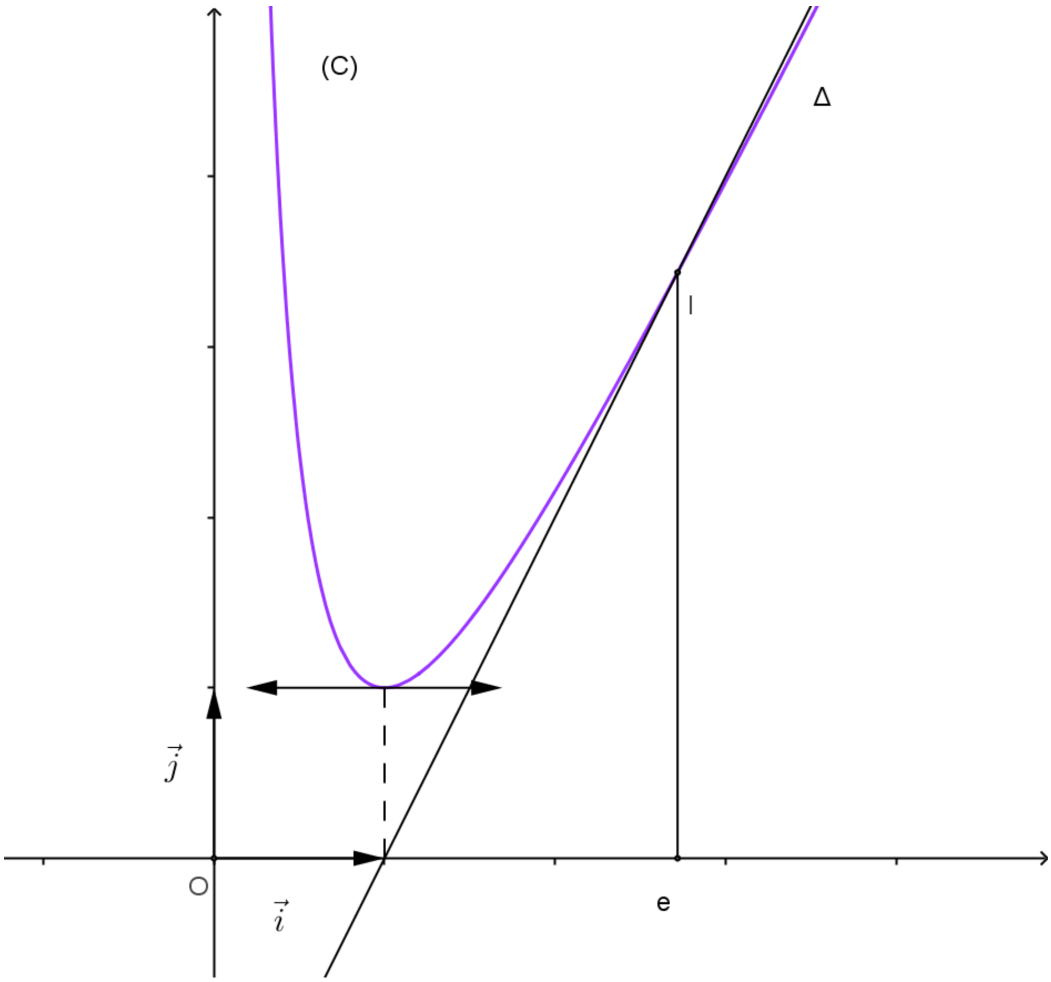
(C) $\cap D=\{I(e,2e-2)\}$.

3. a) Pour tout réel x > 0, $f'(x)=2+\dfrac{-\frac{1}{x}x-(1-\ln x)}{x^2}=2+\dfrac{-2+\ln x}{x^2}=\dfrac{2x^2-2+\ln x}{x^2}=\dfrac{g(x)}{x^2}$.

b) Le tableau de variation de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
f	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

3.



5. a) Pour tout entier naturel,

$$u_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\left(f(x)-2x+2\right)dx=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\left(\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)dx=\left[\ln x-\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_{e^n}^{e^{n+1}}$$

$$=\ln\left(e^{n+1}\right)-\frac{1}{2}\left(\ln\left(e^{n+1}\right)\right)^2-\ln\left(e^n\right)+\frac{1}{2}\left(\ln\left(e^n\right)\right)^2$$

$$=n+1-\frac{1}{2}(n+1)^2-n+\frac{1}{2}n^2 \quad =1-\frac{1}{2}n^2-n-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}n^2$$

$$=\frac{1}{2}-n$$

b) A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) , la droite (D) et les droites d'équations

$x = 1$ et $x = e^2$ donc $A=\int_1^{e^2}\left|f(x)-(2x-2)\right|dx=\int_1^{e^2}\left|\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right|dx$

$$=\int_1^{e}\left(\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)dx-\int_e^{e^2}\left(\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)dx=u_0-u_1$$

$$A=u_0-u_1=\frac{1}{2}-\left(-1+\frac{1}{2}\right)=1.$$

Exercice 3 :

1. a) On a : $P : x + y - z + 2 = 0$.

$A(a, -2, 1) \in P \Leftrightarrow a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$; $B(2, b, 3) \in P \Leftrightarrow b + 1 = 0 \Leftrightarrow b = -1$;

$C(1, 1, c) \in P \Leftrightarrow 4 - c = 0 \Leftrightarrow c = 4$;

b) On a A(1, -2, 1) , B(2,-1, 3) et C(1, 1, 4) donc $\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}$ d'où $\vec{AB}\wedge\vec{AC}\begin{pmatrix}-3\\-3\\3\end{pmatrix}$.

b) L'aire du triangle ABC est $a = \frac{1}{2}\left\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{27} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

2.a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (Δ) et $\vec{u}$ est un vecteur normal à (P).

D'autre part, H(0, 0, 2) , $0 + 0 - 2 + 2 = 0$ donc $H \in P$ et pour t = 0 , $H \in \Delta$.

Ainsi, (Δ) est perpendiculaire au plan (P) en H.

b) $HA = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$, $HB = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$ et $HC = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$ donc H est équidistant de A , B et C.

3. a) Soit le point I de la droite (Δ) d'abscisse strictement positive , $\begin{cases} x_I = t \\ y_I = t \\ z_I = -t + 2 \end{cases}$, $t > 0$.

$IH = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{t^2 + t^2 + t^2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}|t| = \sqrt{3} \Leftrightarrow |t| = 1$. D'où t = 1. Par suite, H(1, 1, 1) .

b) Soit (S) la sphère de centre I et rayon 3 , $d(I,P) = \frac{|3|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. Comme $d(I,P) < 3$, alors l'intersection de (P) et (S) est un cercle ($\mathcal{C}$) de centre le projeté orthogonal de I sur P , H, et de rayon $\sqrt{3^2 - (d(I,P))^2} = \sqrt{6}$

4. Soit $M(t, t, -t + 2)$ un point variable de (Δ) et E(2 , 2 , 0) un point fixe de (Δ).

On a $\vec{AE}\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}$, le volume du tétraèdre EABC est $v = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{AB}\wedge\vec{AC}\right).\vec{AE}\right| = \frac{18}{6} = 3$.

On a $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} t-1 \\ t+2 \\ -t+1 \end{pmatrix}$, le volume du tétraèdre EABC est $v' = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AM}\right| = \frac{|-9t|}{6} = \frac{3}{2}|t|$.

$v' = 2v \Leftrightarrow \frac{3}{2}|t| = 6 \Leftrightarrow |t| = 4 \Leftrightarrow t = 4$ ou $t = -4$.

Annexe à compléter et à rendre avec la copie

Nom de l'élève : ……………………………………………………