

Exercice 1 : (8 points)

Soit f la fonction définie, sur \mathbb{R} , par $f(x) = x + e^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à (C) .

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f .

3. Tracer la courbe (C) .

4. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par (C) , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

5. On pose pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \int_0^1 (x + e^{-nx}) dx$.

a) Montrer que pour tout entier $n > 0$, $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-(n+1)x} (1 - e^x) dx$.

b) Etudier le signe de I_n et $I_{n+1} - I_n$.

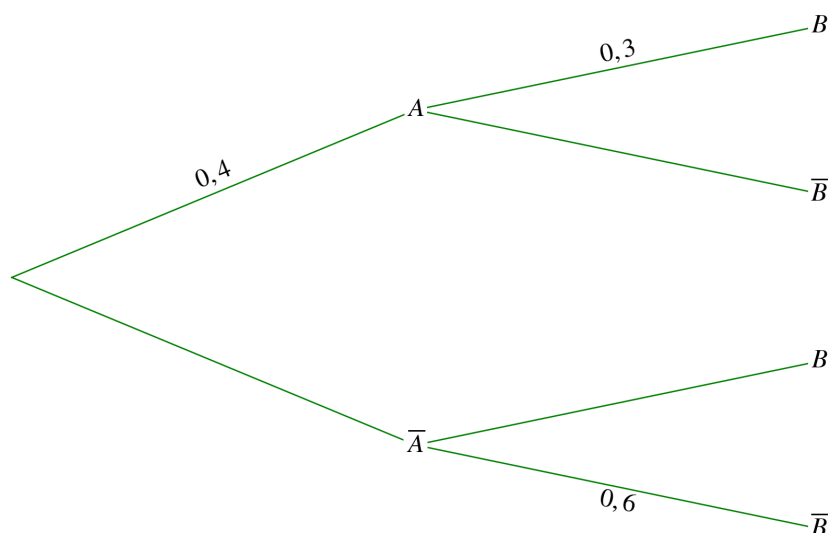
c) Montrer alors que la suite (I_n) est convergente.

d) Montrer que pour tout entier $n > 0$, $I_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{ne^n}$.

e) Déterminer alors la limite de la suite (I_n) .

Exercice 2 : (5 points)

Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre pondéré suivant :



1. Calculer $p(B|\bar{A})$, $p(B)$ et $p(A \cup B)$.

2. On répète l'expérience précédente 10 fois de suite et on suppose que les expériences sont deux à deux indépendantes.

Calculer la probabilité que l'évènement « A ou B » soit réalisé au plus 2 fois à l'issue des 10 expériences.

Exercice 3 : (7 points)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 .

U_1 contient quatre boules rouges et trois boules vertes.

U_2 contient deux boules rouges et une boule verte.

I- On tire au hasard une boule de U_1 et on la met dans U_2 , puis on tire une boule de U_2 .

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges restant dans l'urne U_2 à l'issue des deux tirages précédents.

1. Démontrer que $p(X = 2) = \frac{9}{14}$.

2. Donner les trois valeurs de X et déterminer la loi de probabilité de X .

3. Calculer l'espérance mathématiques de X .

II- Dans cette partie les boules rouges portent chacune le nombre 1 et les boules vertes portent chacune le nombre -1.

On choisit une urne au hasard puis on tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne choisie.

On considère les évènements suivants :

A : « l'urne choisie est U_1 »

F : « la somme des nombres portés par les deux boules tirées est égale à 0 »

1. a) Calculer $p(F|A)$ et $p(F|\bar{A})$.

b) Dédire que $p(F) = \frac{13}{21}$.

2. On désigne par G l'évènement « la somme des nombres portés par les deux boules tirées est égale à -2 ».

Calculer $p(G)$.