Lycée Ibn Rachik- Ezzahra *Bac Blanc 2019* *Classe : 4 Sciences Expérimentales 3*

MATHEMATIQUES

M. ABIDI Farid *Coef. 3* ***** *Durée 3h*

Exercice 1 : (3,5 points)

On souhaite étudier le refroidissement du café servi par une machine initialement à une température de 100°C. On suppose que la température ambiante de la pièce dans laquelle se trouve le café est constante et égale à 20°C.

La loi de Newton affirme que le taux de variations de la température d'un objet est proportionnel à la différence entre sa température et la température ambiante. Les expériences en laboratoire affirment que, la température en (°C) du café à l'instant t vaut f(t), où f est une fonction définie et dérivable sur $[0,+\infty[$ tel que pour tout réel t positif, $f'(t)=-0,1.(f(t)-20)$.

1. a) Résoudre sur $[0,+\infty[$ l'équation différentielle (E) : $y'+0,1y=2$.

   b) Déterminer la fonction f sachant que la température initiale du café est de 100°C.

2. On admet que la fonction f, dont la courbe est représentée en annexe à la page 5/5, est définie pour tout réel t positif, par $f(t)=20+80e^{-0,1.t}$.

   a) Justifier le sens de variation de la fonction f sur $[0,+\infty[$.

   b) Déterminer la limite de f(t) quand t tend vers $+\infty$ et l'interpréter.

3. a) Quelle est la température moyenne du café au cours des 2 premières minutes ? on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près.

   b) Un café est buvable lorsque sa température est inférieure ou égale à 50°C.

   Combien de minutes doit-on attendre pour déguster le café ? On donnera le résultat arrondi à la minute.

Exercice 2 : (5 points)

Dans cet exercice, on étudie quelques grandeurs caractéristiques du fonctionnement d'un parking d'une ville. Les probabilités seront données avec une approximation à 10^{-4} près.

On appelle durée d'attente le temps qui s'écoule entre le moment où la voiture se présente à l'entrée du parking et le moment où elle franchit la barrière d'entrée du parking. Le tableau suivant présente les observations faites sur une journée :

Durée d'attente en minute	[0, 2[	[2, 4[	[4, 6[	[6, 8[
Nombre de voitures	75	19	10	5

1. Donner une estimation de la durée d'attente moyenne d'une voiture à l'entrée du parking.

2. On considère la série double (x_i, y_i) où x_i désigne le centre de l'intervalle d'attente $[a_i, a_i + 2[$, avec $a_i \in \{0, 2, 4, 6\}$, et y_i est le nombre de voitures.

   a) Construire le nuage de points de cette série.

   b) On pose $z_i = \frac{75}{2x_i} + \frac{1}{2}$ et on obtient le tableau ci -dessous :

Durée d'attente en minute	38	13	8	5,9
Nombre de voitures	75	19	10	5

   Déterminer à l'aide de la calculatrice et par la méthode des moindres carrés une équation de la droite de régression de y en z. En déduire une relation du type $y = \frac{a}{x} + b$ où a et b seront arrondi au millième.

3. Donner une estimation du nombre de voitures qui attendent à l'entrée du parking entre 8 et 10 minutes.

4. On décide de modéliser cette durée d'attente par une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ (exprimé en minute).

   a) Justifier que l'on peut choisir $\lambda = 0,5$.

   b) Une voiture se présente à l'entrée du parking. Quelle est la probabilité qu'elle mette moins de deux minutes pour franchir la barrière ?

c) Une voiture attend à l'entrée du parking depuis une minute. Quelle est la probabilité qu'elle franchisse la barrière dans la minute suivante ?

Exercice 3: (5,5 points)

Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules noires toutes indiscernables au toucher.

Un joueur doit effectuer n tirages successifs avec remise, où n est un entier supérieur ou égal à 1.

- S'il obtient une boule noire, le jeu d'arrête.
- S'il obtient une boule blanche, il doit continuer jusqu'à obtenir une boule noire.

On considère les évènements :

A_n : « obtenir une boule noire pour la première fois au $n^{\text{ième}}$ tirage »

B_n : « obtenir aucune boule noire à l'issue des n tirages »

1. a) Calculer $p(A_1)$ et $p(A_2)$.

   b) $p(B_2)$.

2. a) Montrer que la probabilité de A_n est $p(A_n)=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^n$.

   b) Calculer $\sum_{k=1}^{n} p(A_k)+p(B_n)$.

3. Soit X_n la variable aléatoire définie par : $X_n=\begin{cases} n \text{ , si } A_n \text{ est réalisé} \\ 0 \text{ , si } A_n \text{ n'est pas réalisé} \end{cases}$.

   a) Donner la loi de probabilité de X_n.

   b) Calculer l'espérance mathématique $E(X_n)$ de X_n.

4. a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} n.\ln\left(\frac{3}{5}\right).e^{n\ln\left(\frac{3}{5}\right)}$; en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n)$.

   b) Compléter le tableau ci-dessous :

n	1	2	3	4	5
$E(X_n)$					

Exploiter le tableau ci-dessus pour déterminer l'entier naturel n pour lequel l'espérance mathématiques de X_n soit maximale.

Exercice 4: (6 points)

Pour tout entier naturel n non nul, On considère la fonction f_n définie sur $]0,+\infty[$ par

$f_n(x) = \ln x + \dfrac{x}{n} - 1$ repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. a) Etudier les variations de f_n et dresser son tableau variation.

   b) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $]0,+\infty[$. Vérifier que $1 \le \alpha_n < e$.

   c) Déterminer le signe de $f_n(x)$ suivant du réel x strictement positif.

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On note (Γ) la courbe représentative de la fonction ln.

   a) Déterminer une équation de la droite D_n passant par les points $A(0,1)$ et $B_n(n,0)$.

   b) Montrer que α_n est l'abscisse du point d'intersection de (Γ) et D_n.

   c) Représenter sur la feuille annexe les droites D_1, D_2 et D_3, ainsi que les réels α_1, α_2 et α_3.

   d) Préciser la valeur de α_1 puis conjecturer le sens de variations de la suite (α_n).

3. a) Montrer que, pour tout réel x > 0, $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \dfrac{-x}{n(n+1)}$.

   b) En déduire que $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$.

   c) Déduire des questions précédentes le sens de variations de la suite (α_n).

   d) Montrer que la suite (α_n) converge vers un réel ℓ dont on donnera un encadrement.

4. a) Montrer que pour tout entier n > 0, $1 - \dfrac{e}{n} \le \ln \alpha_n \le 1 - \dfrac{1}{n}$.

   b) En déduire ℓ.

Annexe à compléter et à rendre avec la copie

Nom de l'élève :

Figure de l'exercice n°1 :

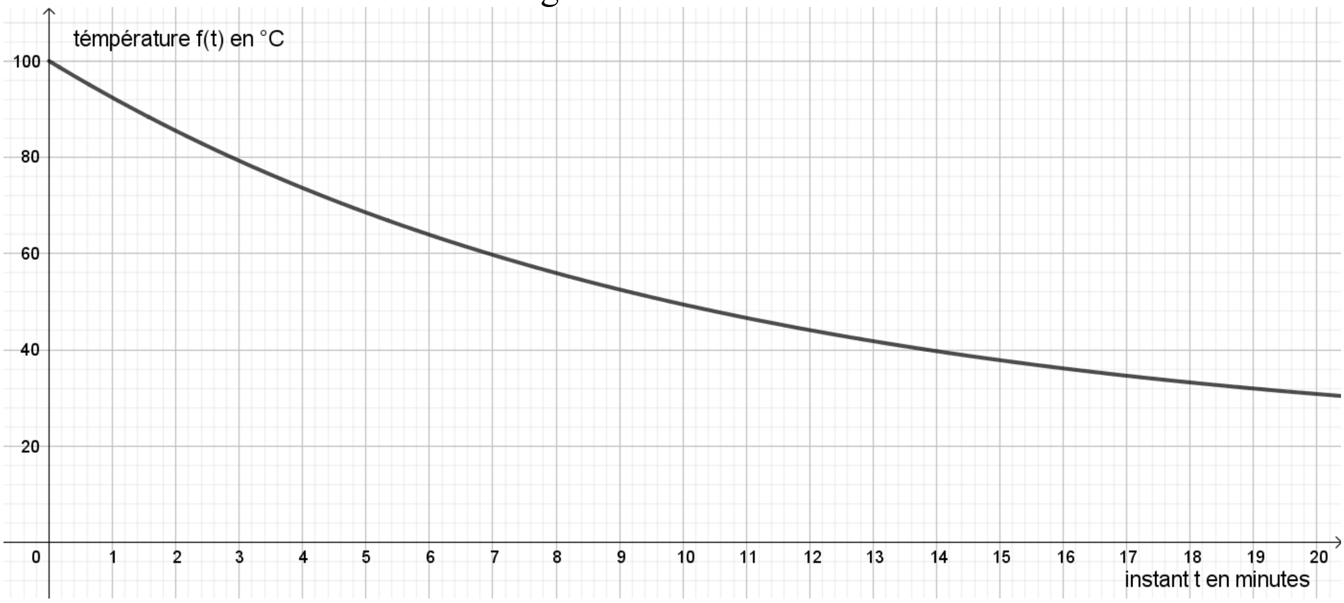

Figure de l'exercice n°4.