Lycée Ibn Rachik- Ezzahra	Bac Blanc 2019 MATHEMATIQUES	Classe : 4 Sciences Techniques 4
M. ABIDI Farid		Coef. 3 ***** Durée 3h

Le sujet comporte 5 pages numérotées 1/5, 2/5, 3/5, 4/5 et 5/5.

Exercice 1: ***(3,5 points)***

Dans cet exercice, on étudie quelques grandeurs caractéristiques du fonctionnement d'un parking d'une ville. Les probabilités seront données avec une approximation à 10^{-4} près.

On appelle durée d'attente le temps qui s'écoule entre le moment où la voiture se présente à l'entrée du parking et le moment où elle franchit la barrière d'entrée du parking. Le tableau suivant présente les observations faites sur une journée

Durée d'attente en minute	[0, 2[	[2, 4[	[4, 6[	[6, 8[
Nombre de voitures	75	19	10	5

1. Donner une estimation de la durée d'attente moyenne d'une voiture à l'entrée du parking.
2. On décide de modéliser cette durée d'attente par une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ (exprimé en minute).
   a) Justifier que l'on peut choisir $\lambda = 0,5$.
   b) Une voiture de présente à l'entrée du parking. Quelle est la probabilité qu'elle mette moins de deux minutes pour franchir la barrière ?
   c) Une voiture attend à l'entrée du parking depuis une minute. Quelle est la probabilité qu'elle franchisse la barrière dans la minute suivante ?

Exercice 2: ***(4,5 points)***

Une entreprise fabrique des chaudières de deux types : des chaudières dites « à cheminée » et des chaudières dites « à ventouse ».

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendantes.

Partie A

Le nombre de chaudière fabriquée lors des années précédentes est donné par le tableau suivant :

Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5
Nombre de chaudières fabriquées par milliers : y_i	15,35	15,81	16,44	16,75	17,19	17,30

1. A l'aide d'une calculatrice, déterminer :
   a) le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique double (x, y) ; arrondir à 10^{-2}.
   b) une équation de la droite de régression de y en x, par la méthode des moindres carrés, sous la forme $y = ax + b$, où a sera arrondi à 10^{-3} et b sera arrondi à l'unité.
2. En supposant que la tendance observée se poursuive deux années, estimer le nombre de chaudières qui seront fabriquées l'année de rang 7.

Partie B

L'entreprise a fabriqué en un mois 900 chaudières à cheminée et 600 chaudères à ventouse.

Dans ce lot, 1% des chaudières à cheminée sont défecteuses et 5% des chaudières à ventouse sont défectueuses.

On prélève au hasard une chaudière dans la population dans la production de ce mois. Toutes les chaudières ont la même probabilité d'être prélevées.

On considère les évènements suivants :

A : « la chaudière est à cheminée » , B : « la chaudière est à ventouse »

et D : « la chaudière présente un défaut ».

1. Déterminer p(A), p(B), $p(D | A)$ et $p(D|B)$.
2. Calculer $p(D)$.
3. On prélève au hasard 10 chaudières dans ce lot. Quelle est la probabilité de trouver au plus une chaudière qui présente un défaut ? On donnera la valeur exacte et une la valeur arrondie à 10^{-2}.

<u>Exercice 3:</u> (6 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On considère les points A(3, 1, 1) , B(2, 0, 3) et C(1, 2, 2) .

1. a) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.
   b) Calculer l'aire du triangle ABC.
   c) Montrer que G (2 ; 1 ; 2) est le centre de gravité du triangle ABC.
2. Ecrire une équation du plan (P) déterminé par les points A, B et C.

3. Soit (T) la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 3-2t \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que (T) est la tangente, dans (P), en A au cercle $(\mathscr{C})$ circonscrit au triangle ABC.

b) Soit D le point de (T) dont la côte est nulle. Déterminer les coordonnées de D, vérifier que ABCD est un losange puis calculer son aire.

4- On considère le point $E(-2,-3,-2)$ et on note (Γ) l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\left\| 3\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} \right\| = 84$.

a) Montrer que (Γ) est une sphère de rayon $\sqrt{14}$ dont on précisera les coordonnés de son centre I.

b) Donner l'équation cartésienne de la sphère (Γ) et vérifier que les points A, B et C appartiennent à (Γ).

c) Déterminer alors l'intersection du plan (P) et de la sphère (Γ).

Exercice 4 : *(6 points)*

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x - \frac{(\ln x)^2}{x}$ et on désigne par (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Déterminer $\lim_{x \to 0^+} f(x)$. Déduire une asymptote à (C).
2. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et vérifier que la droite (D) d'équation y = x est une asymptote à (C).
3. Le tableau ci-dessous donne les variations de la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = x^2 + (\ln x)^2 - 2\ln x$.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
g	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Vérifier que pour tout x > 0, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$. En déduire que f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

4. a) Démontrer que (D) est tangente à (C) au point A(1, 1) et étudier la position de (C) par rapport à (D).

   b) Vérifier que la tangente (T) à (C) au point B d'abscisse e^2 est parallèle à (D).

5. a) Démontrer que l'équation f(x) = 0 admet dans $]0,1[$ une racine unique α.

   b) Montrer que pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $f(x)=0$ est équivalent à $e^{-x}=x$.

6. Sur la feuille annexe ci-jointe, on a tracé, dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, la droite D et la courbe (Γ) d'équation $y=e^{-x}$.

   Placer le point $E(\alpha,0)$, le point $F\left(e^2,0\right)$ et le point B, puis tracer (T) et (C).

7. a) Calculer $\displaystyle\int_{\alpha}^{1}\frac{(\ln x)^2}{x}dx$ en fonction de α.

   b) Déduire, en fonction de α, l'aire S(α) de la partie du plan limitée par (C), (D) et les droites d'équations x = α et x = 1.

Annexe à compléter et à rendre avec la copie

Nom de l'élève :

Figure de l'exercice 4