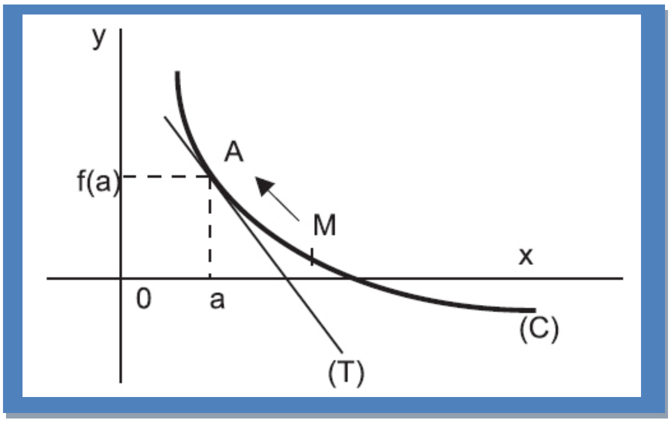
DÉRIVABILITÉ

I / Nombre dérivée :

a) Définition : une fonction f définie, sur n intervalle I ouvert et a un réel de I . On dit que f est dérivable en a s'il existe un nombre réel , noté f ' (a) tel que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$.

Interprétation graphique du nombre dérivée :

Le plan est muni d'un repère orthonormé . Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I .f est dérivable en a , si est seulement si , la courbe représentative de f admet au point M (a , f (a))une tangente de pente f ' (a) .



Cette tangente est d'équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) .$$

Théorème : si f est dérivable en a alors f est continue en a . (la réciproque n'est pas vrais) .

Définition :Si f est dérivable en a , alors le réel f (a) + f' (a) h est une approximation affine de f (a + h) , pour h voisin de 0 .

Théorèmes : Une fonction f définie sur un intervalle ouvert est dérivable en un réel a de I , si et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$.

f est dérivable sur un intervalle ouvert I si elle est dérivable en tout réel de I .

Dérivées des fonctions usuelles :

Fonction f	Intervalle	La fonction dérivée f ' .
$x \to x^n$, $n \in IN - \{0,1\}$	IR	$x \to nx^{n-1}$
$x \to 1/x^n$, $n \in IN^*$	Toute intervalle inclus dans IR*	$x \to -n x^{-n-1}$
$x \to a$	IR	$x \to 0$
$x \to ax+b$	IR	$x \to a$
$x \to \sqrt{x+a}$	]-a,+∞[.	$x \to \dfrac{1}{2\sqrt{x+a}}$
$x \to \dfrac{ax+b}{cx+d}$	X ∈ IR - { -d/c }	$x \to \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

II - Opérations sur les fonctions dérivables

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

Fonction	Intervalle	Fonction dérivée
$f + g$	I	$f' + g'$
$a f$, $a \in IR$	I	$a f'$
$f \times g$	I	$f' g + f g'$
$1/f$	Toute intervalle inclus dans $\{x \in I, f(x) \neq 0\}$	$-f'/f^2$
f/g	Toute intervalle inclus dans $\{x \in I, g(x) \neq 0\}$	$(f'g - fg')/g^2$
f^n , $n \in IN - \{0,1\}$	I	$nf' f^{n-1}$
$1/f^n$, $n \in IN^*$	Toute intervalle inclus dans $\{x \in I , f(x) \neq 0\}$	$-n f' f^{-n-1}$

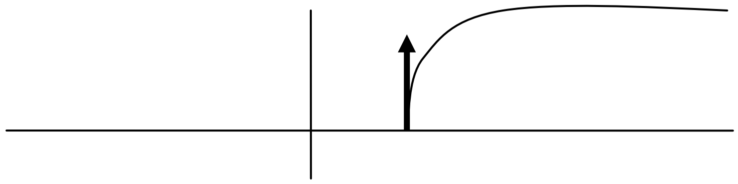
Fonction $\sqrt{f}$: Théorème : Soit f une fonction définie , strictement positive sur un intervalle ouvert I et a un réel de I . Si f est une fonction dérivable en a et si f (a) > 0 , alors la fonction $\sqrt{f}$ est dérivable en a et on a :

$$\left(\sqrt{f}\right)'(a) = \frac{f'(a)}{2\sqrt{f(a)}} .$$

f est non dérivable en a si : * f est dérivable a droite en a et a gauche en a et $f_g'(a) \neq f_d'(a)$. La courbe représentative de f admet un point anguleux en a . ou

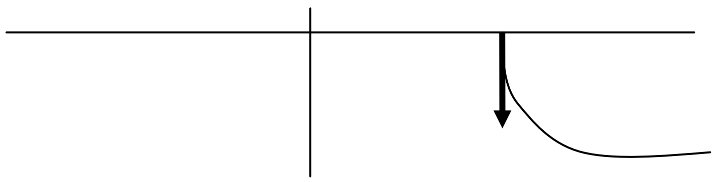
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty \\ \text{ou} \\ \lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty \end{cases}$$

la courbe de f admet une demi tangente verticale dirigée vers le haut .



$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty \\ \text{ou} \\ \lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty \end{cases}$$

la courbe de f admet une demi tangente verticale dirigée vers le bas .



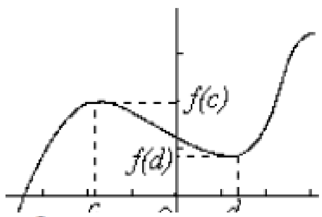
Sens de variation

Théorème : f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. Si pour tout x de I, $f'(x) > 0$ sauf peut-être en quelques points où $f'(x)$ s'annule alors f est strictement croissante sur I.
2. Si pour tout x de I, $f'(x) < 0$ sauf peut-être en quelques points où $f'(x)$ s'annule alors f est strictement décroissante sur I.
3. Si pour tout x de I, $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I.

Extrema

Définition : f est une fonction dérivable sur un intervalle I, c est un point de I.
Dire que $f(c)$ est un **maximum local** (resp. **minimum local**) signifie que l'on peut trouver un intervalle J inclus dans I et contenant c, tel que, pour tout x de J, $f(x) \leq f(c)$ (resp. $f(x) \geq f(c)$).
On appelle extremum local, un maximum ou un minimum local.



Théorème : f est une fonction dérivable sur un intervalle I ouvert, c est un point de I.

1. Si $f(c)$ est un extremum local, alors $f'(c) = 0$.
2. Si f' s'annule en c en changeant de signe, alors $f(c)$ est un extremum local.

Remarque : Lorsque $f(c)$ est un extremum local, la tangente à la courbe représentant f en $A(c; f(c))$ est horizontale.

Tableau de variation :

Exemple 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x + 1$.

- Dérivée : $f'(x) = 2x - 6$
- Etude du signe de la dérivée : $2x - 6$ est du premier degré et s'annule pour $x = 3$.

On applique la règle "signe de $a = 2$ après le 0" (donc $+$ après le 0).

- Tableau de variations :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
f'(x)		$-$	0	$+$	
f(x)		$\searrow$	-8	$\nearrow$	

Le tableau a été complété par le calcul de $f(3)$: $f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 1 = -8$.

Exemple 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$.

- Dérivée : $f'(x) = -3x^2 - 2x + 1$
- Etude du signe de la dérivée : $-3x^2 - 2x + 1$ est du second degré.

Calcul du discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(-3)(1) = 16 > 0$.

On applique donc la règle "signe de $a = -3$ (donc $-$) à l'extérieur des racines".

Calcul des racines :

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-2) - 4}{-6} = \dfrac{1}{3}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-2) + 4}{-6} = -1$

- Tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		1/3		$+\infty$
f'(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	
f(x)		$\searrow$	0	$\nearrow$	32/27	$\searrow$	

Le tableau a été complété par le calcul de $f(-1)$ et $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$:

$f(-1) = -(-1)^3 - (-1)^2 - 1 + 1 = 1 - 1 - 1 + 1 = 0$

$f\left(\dfrac{1}{3}\right) = -\left(\dfrac{1}{3}\right)^3 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \dfrac{1}{3} + 1 = -\dfrac{1}{27} - \dfrac{3}{27} + \dfrac{9}{27} + \dfrac{27}{27} = \dfrac{32}{27}$