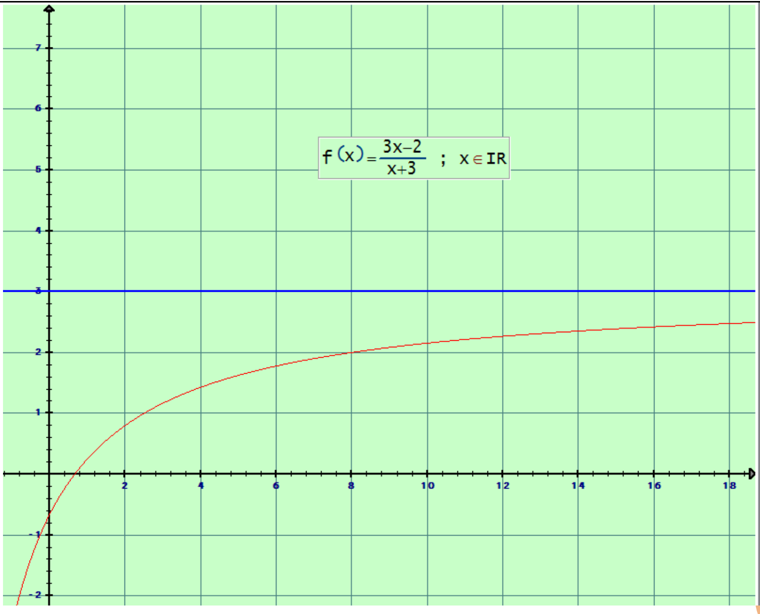
Limites et comportements asymptotiques

I. Limite fini à l'infini (Asymptote horizontale) :

Lorsque x s'en va vers $+\infty$, f(x) se rapproche de plus en plus du réel b. On dit alors que f(x) tend vers b. Ou que la limite de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$ est égale à b.

Ce que l'on résume par : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$..



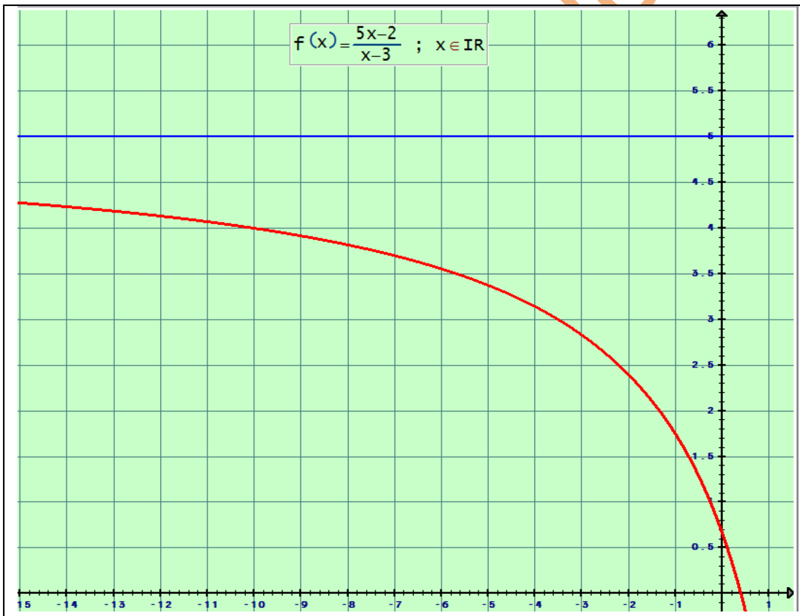
Interprétation géométriques et constructions

On dit dans ce cas que la droite d'équation : y=b est une asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$.

Ou bien

Lorsque x s'en va vers $-\infty$, f(x) se rapproche de plus en plus du réel b. On dit alors que f(x) tend vers b, Ou que la limite de la fonction f lorsque x tend vers $-\infty$ est égale à b.

Ce que l'on résume par : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$.



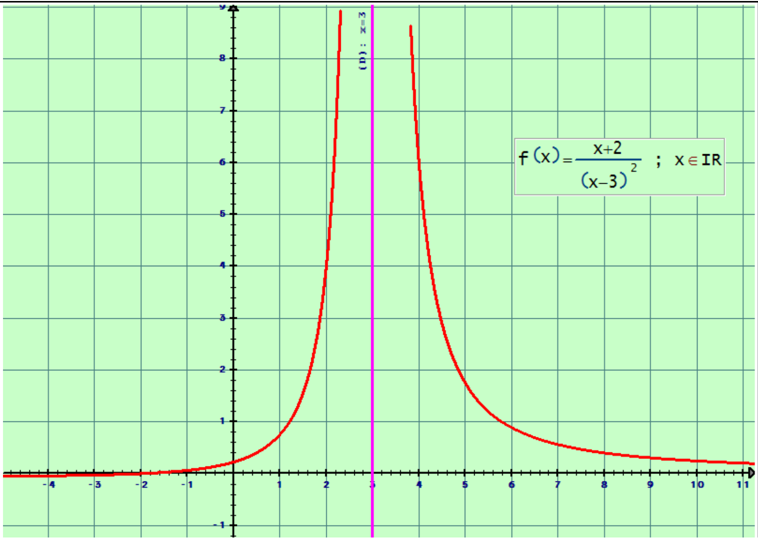
Interprétation géométriques et constructions

On dit dans ces deux cas que la droite d'équation : y=b est une asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $-\infty$.

II. Limite infini en un réel fini (Asymptote verticale) :

Lorsque x se rapproche de plus en plus du réel a, f(x) s'en va vers $+\infty$. On dit alors que f(x) tend vers $+\infty$, Ou que la limite de la fonction f lorsque x tend vers a est égale à $+\infty$.

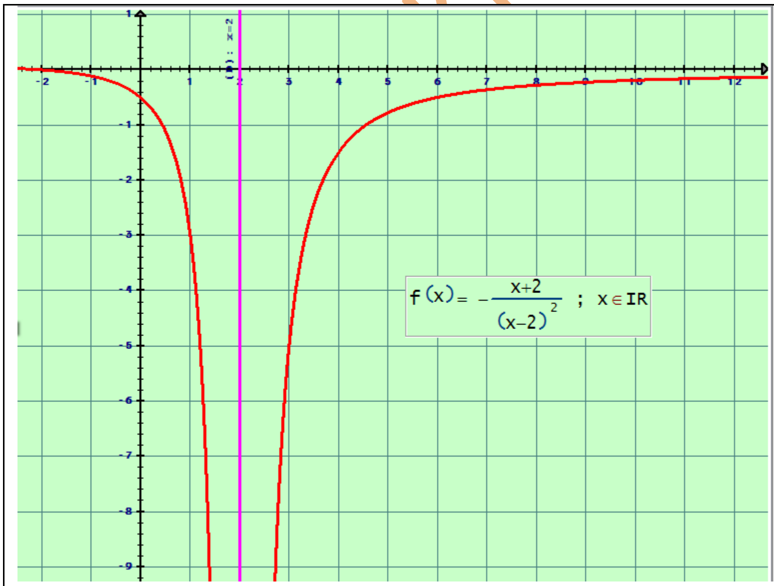
Ce que l'on résume par : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$..

	**Interprétation géométriques et constructions** **On dit dans ce cas que la droite d'équation : x=a est une asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f.**

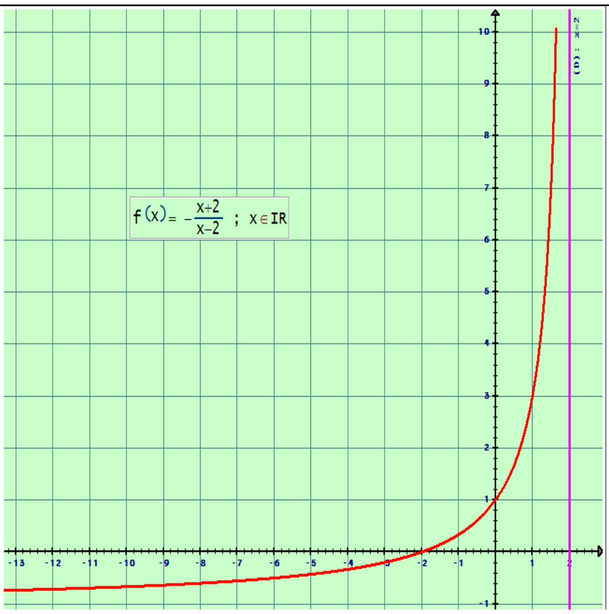
Ou bien

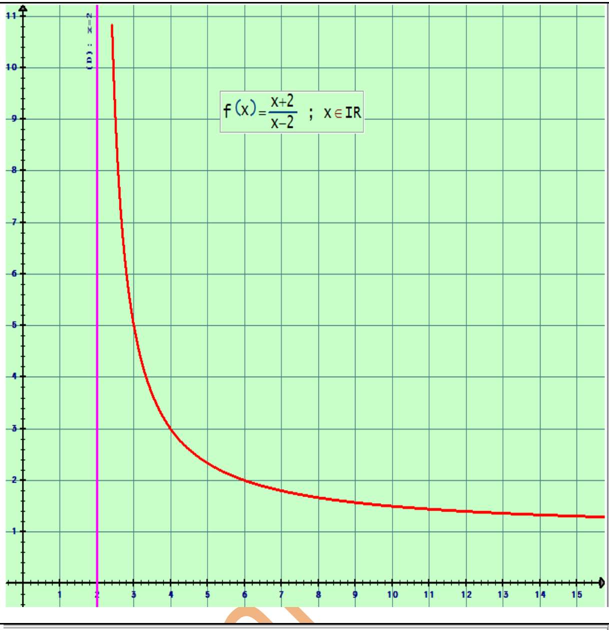
Lorsque x se rapproche de plus en plus du réel a, f(x) s'en va vers $-\infty$. On dit alors que f(x) tend vers $-\infty$, Ou que la limite de la fonction f lorsque x tend vers a est égale à $-\infty$.

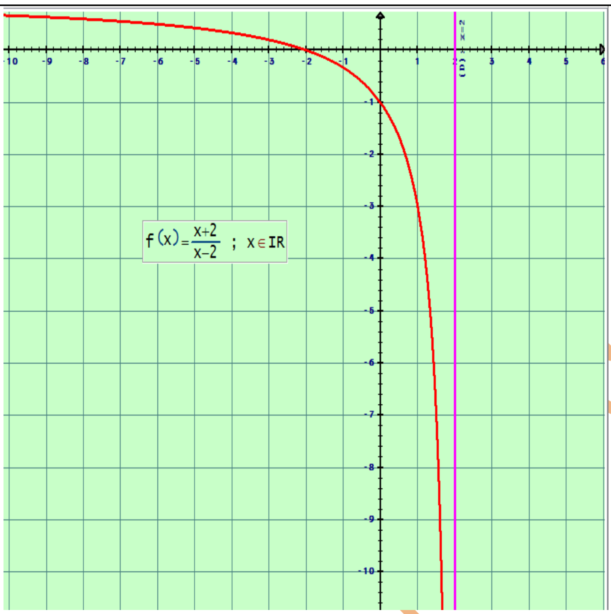
Ce que l'on résume par : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$..

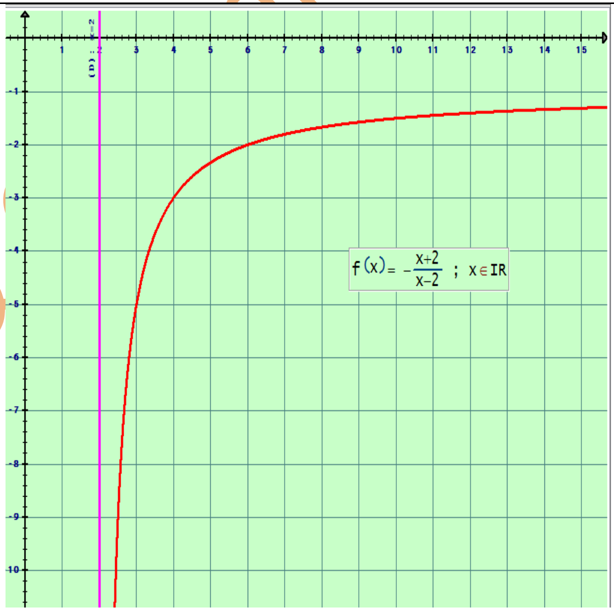
	**Interprétation géométriques et constructions** **On dit aussi dans ce cas que la droite d'équation : x=a est une asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f.**

Quatre cas se présentent :









III. Limite infini à l'infini :

Quatre cas possibles se présentent aussi:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

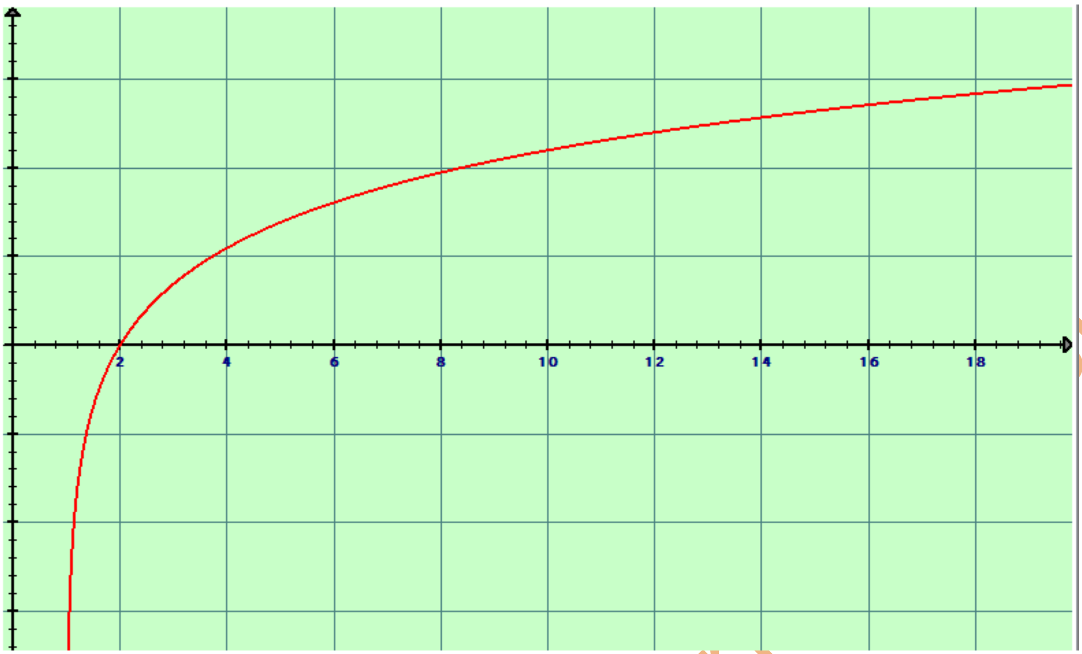
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

Dans ces cas on va étudier les branches infinies.

Dans chacune des cas précédentes (on est dans le cas de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$), on calcule en premier lieu la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, Cette limite sera, quatre cas se présentent :

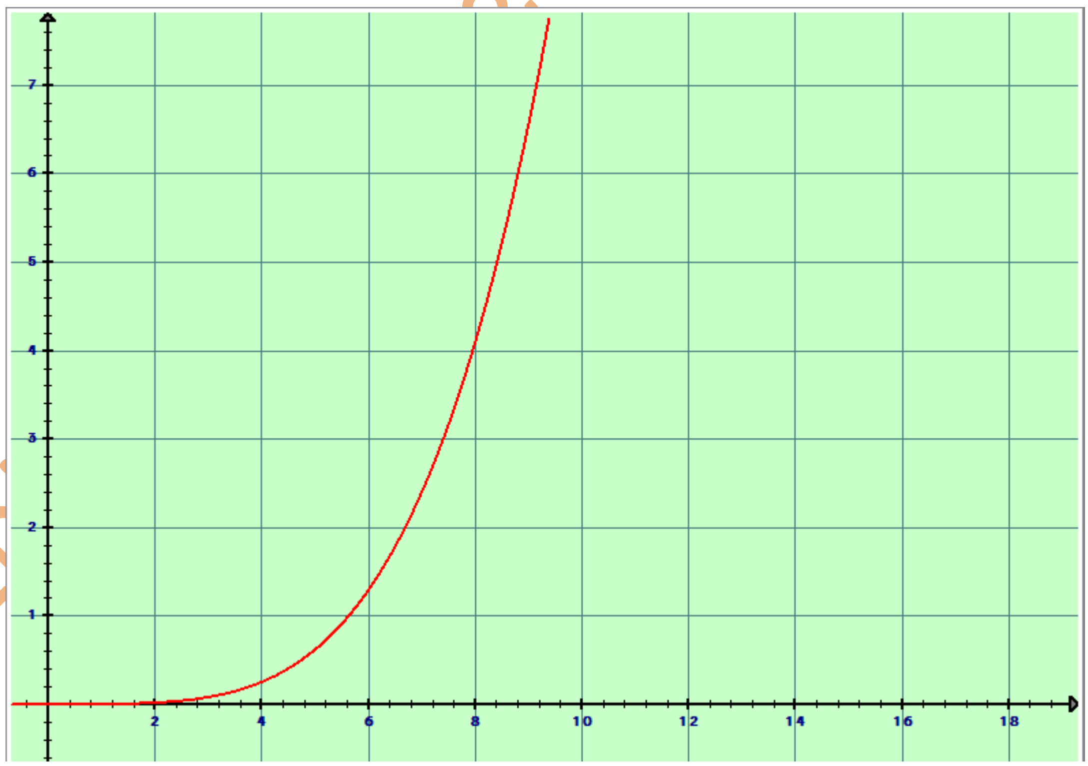
1. **0 (Zéro)**

On dit que la courbe représentative de f admet une branche parabolique parallèle à l'axe des abscisses (x'Ox).



2. **- ∞ ou + ∞**

On dit que la courbe représentative de f admet une branche parabolique parallèle à l'axe des ordonnées (y'Oy).

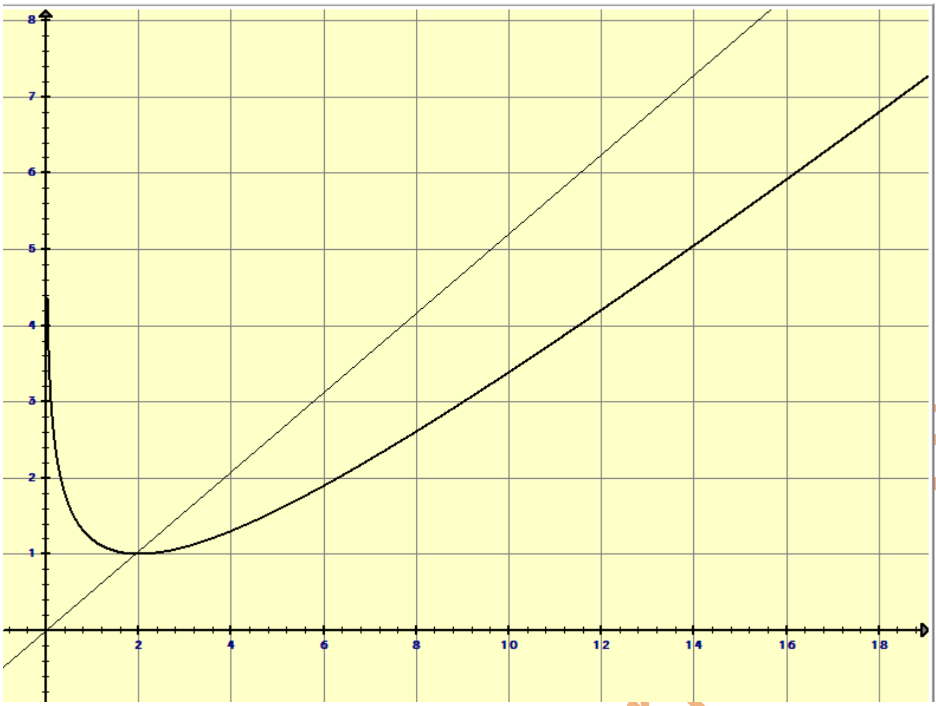


3. **Un réel non nul a.**

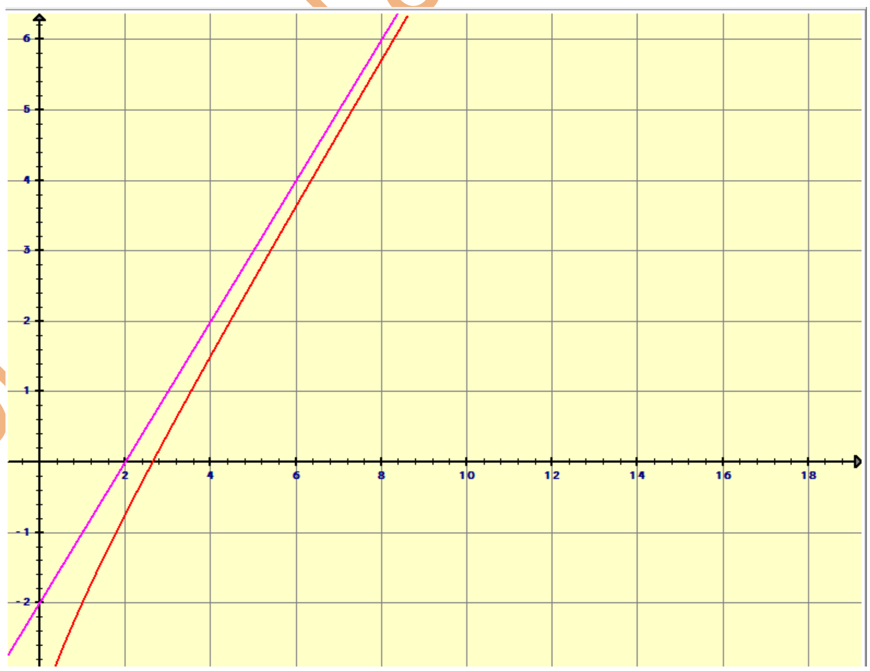
On passe à la dernière étape en calculant la limite de $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$ **. Cette limite sera : Deux cas se présentent :**

a) **- ∞ ou + ∞**

On dit que la courbe représentative de f admet une direction asymptotique parallèle à la droite d'équation y=ax.



b) Un réel b (qui peut être nul), cela signifie que $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=b$ **c'est-à-dire que** $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax-b)=0$**, autrement dit que :** $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$.

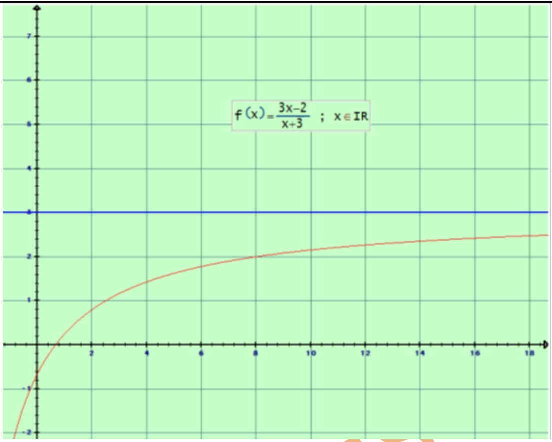
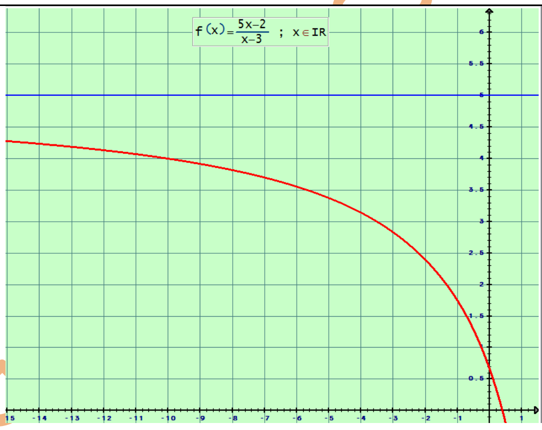
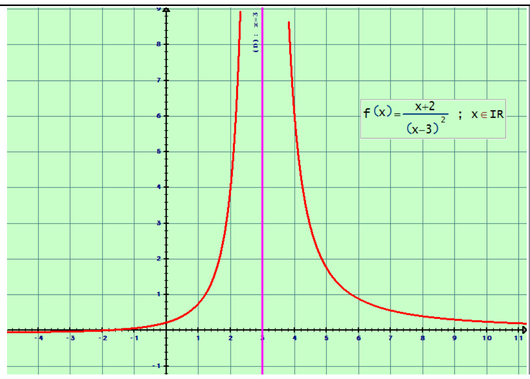
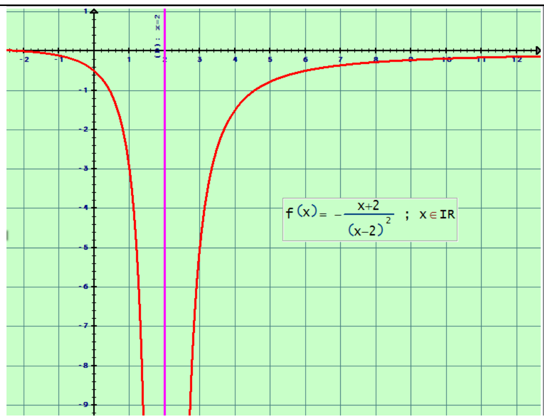


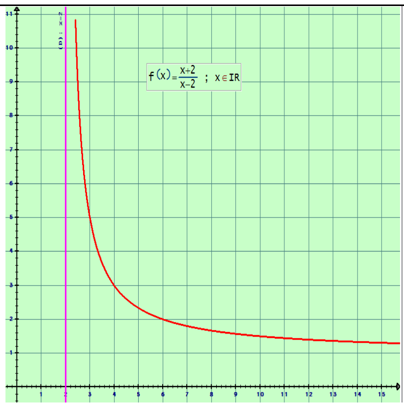
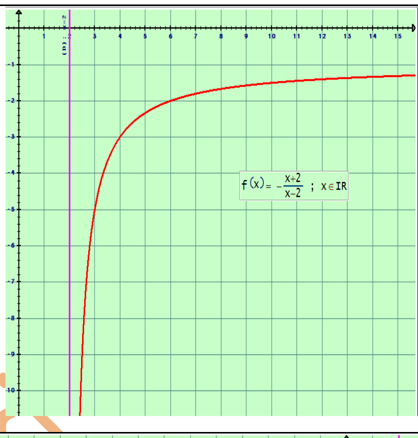
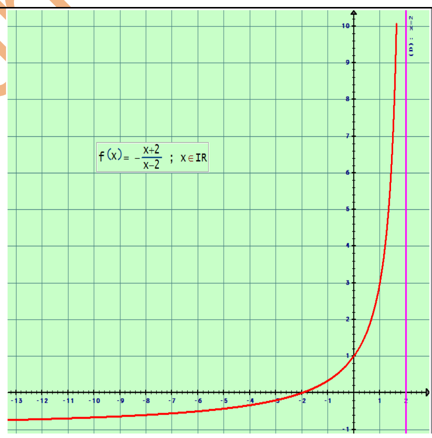
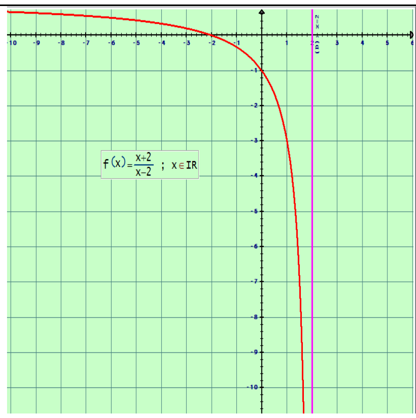
On dit dans ce cas que la droite d'équation : y=ax+b est une asymptote oblique (a est différent de zéro) à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de +∞.

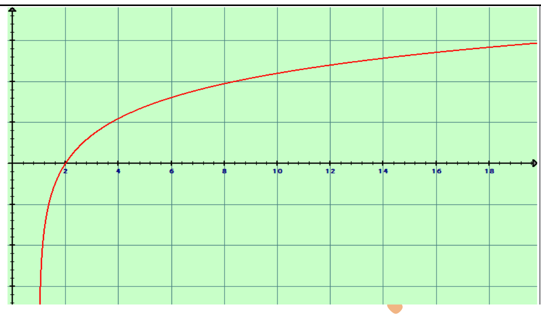
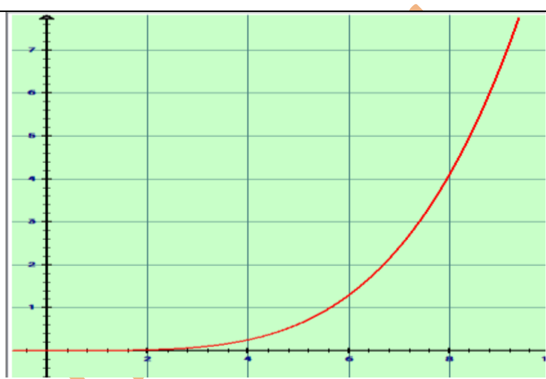
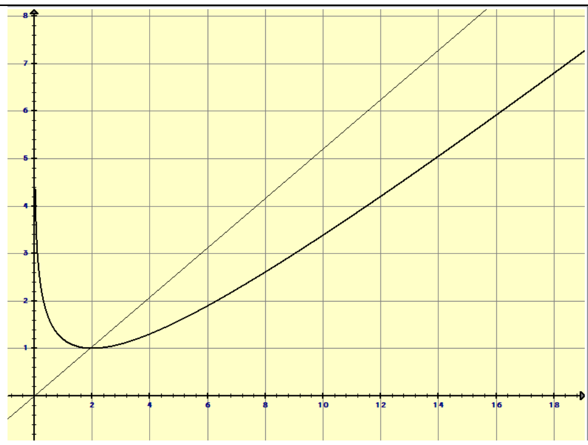
Remarque :

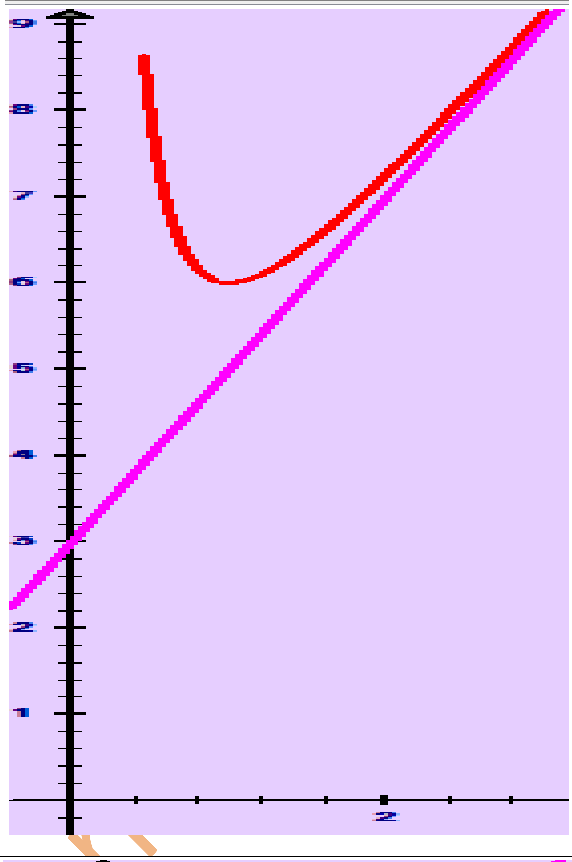
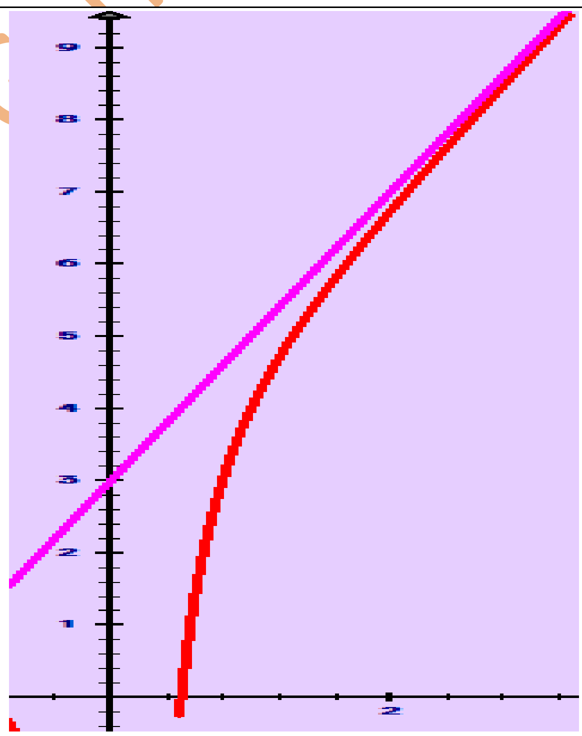
Une autre question se pose : Etudier la position de la courbe par rapport à son asymptote oblique, pour ce il suffit d'étudier le signe de f(x) –(ax+b).

<u>**Résumons :**</u>

<table>
<tr>
<td>1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$</td>
<td rowspan="2">La droite d'équation : y=b est une asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de + ∞ .</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$</td>
<td rowspan="2">La droite d'équation : x=a est une asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>4. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>5. $\lim\limits_{x \to a^{+}} f(x) = +\infty$</td>
<td rowspan="4">La droite d'équation : x=a est une asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>6. $\lim\limits_{x \to a^{+}} f(x) = -\infty$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>7. $\lim\limits_{x \to a^{-}} f(x) = +\infty$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>8. $\lim\limits_{x \to a^{-}} f(x) = -\infty$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ **ou** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ **ou** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ **ou** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$		
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$	**La courbe représentative de f admet une branche parabolique parallèle à l'axe des abscisses (x'Ox).**	
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$	**La courbe représentative de f admet une branche parabolique parallèle à l'axe des ordonnées (y'Oy).**	
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a\ (non\,nul)$		
$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = -\infty$	**La courbe représentative de f admet une direction asymptotique parallèle à la droite d'équation y=ax.**	
$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = b$	**La droite d'équation : y=ax+b est une asymptote oblique (a est différent de zéro) à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de + ∞.**	

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0^{+}$	**La droite (D) d'équation : y=ax+b est une asymptote oblique à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de + ∞ et la courbe de f est au dessus de l'asymptote (D).**	
$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0^{+}$	**La droite (D) d'équation : y=ax+b est une asymptote oblique à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de + ∞ et la courbe de f est au dessous de l'asymptote (D).**	

Remarque : **Tracer bien les asymptotes en premier lieu, ce qui vous permettra de localiser la courbe représentative de la fonction f et de la délimiter.**

Bon travail.