Les nombres complexes

A) Forme algébrique des nombres complexes

Théorème (admis)

Il existe un ensemble appelé ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, vérifiant les trois propriétés suivantes :

1. $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$;
2. Il existe dans $\mathbb{C}$ un élément i tel que : $i^2 = -1$;
3. Tout nombre complexe z s'écrit d'une manière unique $z = a + ib$ où a et b sont réels.
4. $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui vérifient les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication de $\mathbb{R}$.

Remarque

L'équation $x^2 + 1$ admet alors i et (-i) comme solutions dans $\mathbb{C}$

Définition

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Le réel a s'appelle partie réelle de z et on écrit $\text{Re}(z) = a$.

Le réel b s'appelle partie imaginaire de z et on écrit $\text{Im}(z) = b$.

L'écriture $z = a + ib$ s'appelle écriture algébrique ou cartésienne.

Si la partie réelle de z est nul, z est appelé un imaginaire pur.

Remarque

1. On a bien :$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ car tout réel x s'écrit : $x = x + i.0 \in \mathbb{C}$. Les réels sont des nombres complexes de partie imaginaire nulle.
2. Attention : l'écriture $z = a + ib$ ne désigne une forme algébrique que si a et b sont des réels.
En particulier, $z + 3i$ n'est pas une forme algébrique, ainsi que $2 + i(5 - 3i)$. La forme algébrique de $z + 3i$ est plutôt : $a + i(3 + b)$. Pour $2 + i(5 - 3i)$, ça sera : $5 + 5i$
3. La partie imaginaire de $a + ib$ est b et non ib.
4. $\text{Re}(z_1 + z_2) = \text{Re}(z_1) + \text{Re}(z_2)$, $\text{Im}(z_1 + z_2) = \text{Im}(z_1) + \text{Im}(z_2)$.
5. Ayez le réflexe suivant : $z^2 \leq 0 \Leftrightarrow z$ est imaginaire pur.

   Mais: on ne parle jamais ni de complexes posifits , ni de complexes négatifs.
6. Un nombre complexe, dont la partie imaginaire vaut 0, est un réel.

Les nombres complexes

Propriété

Soit z un nombre complexe. On a :

1. z est réel $\Leftrightarrow$ Im(z) = 0;
2. z est imaginaire pur $\Leftrightarrow$ Re(z) = 0;
3. 0 est le seul nombre réel et imagianire pur à la fois.

Exemple

$z = 2 + i\sqrt{2}$ est un nombre complexe. On a : Re(z) = 2 et Im(z) = $\sqrt{2}$.

Soit $z = 4 + 3i$, alors Re(z) = 4 et Im(z) = 3.

Propriété (égalité de deux nombres complexes)

1. Soit $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ deux nombres complexes. Alors z_1 et z_2 sont égaux si et seulement s' ils ont mêmes parties réelle et imaginaire:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 + ib_1 = a_2 + ib_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \text{ et } b_1 = b_2.$$

2. En particulier, $z = a + ib = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \text{ et } b = 0)$.

Théorème

Soit $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ deux nombres complexes. On a :

1. $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$.
2. $z z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$.

Exemple

Soit $z_1 = 1 + 3i$ et $z_2 = -4i$. On a : $z_1 + z_2 = 1 - i$.

$i(1 + i) = i + i^2 = -1 + i$.

$(2 - i)(3 + i) = 6 + 2i - 3i - i^2 = 7 - i$.

Propriété

1. L'addition dans $\mathbb{C}$ vérifie les propriétés suivantes :

- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z + 0 = 0 + z = z$
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z + (-z) = 0$ avec $-z = -a - ib$

2°) La multiplication dans $\mathbb{C}$ vérifie les propriétés suivantes :

- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z.1 = 1.z = z$
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z\dfrac{1}{z} = 1$ avec $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a+ib} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - \dfrac{ib}{a^2+b^2}$

Les nombres complexes

Théorème

1. L'addition dans $\mathbb{C}$ vérifie :

Pour tout z_1, z_2 et z_3 de $\mathbb{C}$, $z_1 + z_2 = z_2 + z_1 = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)$

$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

2. La multiplication dans $\mathbb{C}$ vérifie :

Pour tout z_1, z_2 et z_3 de $\mathbb{C}$, $z_1z_2 = z_2z_1$

$(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$

$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$.

Remarque

On constate que les opérations de calculs dans $\mathbb{C}$ obéissent aux mêmes règles que dans $\mathbb{R}$. Donc dans les calculs sur $\mathbb{C}$, ne précipitons pas sur la forme algébrique. On raisonne le plus longtemps possible avec la variable z et on ne passe à la forme algébrique que lorsqu'on ne peut plus avancer.

Notation

Soit z un nombre complexe. Pour tout naturel n non nul, on pose : $z^n = z \times z \times \ldots \times z$ (n fois).

Par convention : si z est non nul, on note : $z^0 = 1$.

Si z est non nul, on note : $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$.

Propriété (nouvelle identité remarquable)

Pour tout réels a et b, on a : $a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$.

Remarque

1. En particulier, ayons le réflexe d'écrire :

$$z^2 + 1 = (z + i)(z - i).$$

Il n'y a pas d'unicité de la décomposition car on peut aussi écrire :

$$z^2 + 1 = 1 + z^2 = (1 + iz)(1 - iz).$$

2. Retenez :

$$(1 - i)^2 = -2i \text{ et } (1 + i)^2 = 2i.$$

Cette remarque nous permet de dire que tout nombre complexe imaginaire pur est un carré. En effet si $z = i\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+$, alors on peut écrire : $z = i\alpha = 2i(\dfrac{\alpha}{2}) = [(1 + i)\sqrt{\dfrac{\alpha}{2}}\,]^2$.

Si $\alpha < 0$, alors : $z = -2i(-\dfrac{\alpha}{2}) = [(1 - i)\sqrt{-\dfrac{\alpha}{2}}\,]^2$.

Exemples

❑ Cherchons une expression de i^n en fonction de n. Pour cela, calculons d'abord :

- $i^2 = -1$;
- $i^3 = i.i^2 = -i$;
- $i^4 = i.i^3 = i.(-i) = 1$;
- $i^5 = i.i^4 = i$.

Lorsqu'on calcule $i^p = 1$, on peut exprimer i^n en fonction de p. Ici $p = 4$ et on sait que tout entier positif n s'écrit sous la forme :

$$n = 4k + r \text{ avec } k \in \mathbb{N} \text{ et } r \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

On conjecture et on prouve par récurrence:

$$i^{4n} = 1,\ i^{4n+1} = i,\ i^{4n+2} = -1 \text{ et } i^{4n+3} = -i.$$

En effet si $n = 4k + 1$, alors $i^n = i^{4k} = (i^4)^k = 1$.

Donc si $n = 4k + 2$, alors $i^n = i^{4k+2} = -1$.

Si $n = 4k + 3$, alors $i^n = i^{4k+3} = -i$.

❑ Cela nous permet d'écrire : $i^{1999} = -i$ car $1999 = 4.499 + 3$.

❑ La forme algébrique de $\frac{1}{i}$ est : $\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$.

Il s'ensuit que : $i^{-n} = \frac{1}{i^n} = (-i)^n = (-1)^n i^n$.

❑ Mettons $z = \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}}\right)^2 (1-2i)^3$ sous forme cartésienne:

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}}\right)^2 (1-2i)^3 = \frac{1}{3}(1 + 2i - 1)(1-2i)^2(1-2i) \quad = \frac{2i}{3}(1 + 4i^2 - 4i)(1-2i)$$

$$= \frac{2i}{3}(-3 + 4i)(1-2i) \qquad = 4 - \frac{14}{3}i.$$

❑ Mettons $\frac{2-7i}{3+11i}$ sous forme algébrique : $\frac{2-7i}{3+11i} = \frac{(2-7i)(3-11i)}{9-121i^2} = \frac{-71-43i}{130}$.

❑ Cherchons à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(5 + 2i)z - 1 + 3i = -3iz + 4 - 2i$. On a :

$$(5 + 2i)z - 1 + 3i = -3iz + 4 - 2i \Leftrightarrow (5 + 2i)z + 3iz = 5 - 5i$$

$$\Leftrightarrow z + iz = 1 - i$$

$$\Leftrightarrow 5z + 5iz = 5 - 5i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = -i.$$

Les nombres complexes

B) Interprétation géométrique

Définition

On appelle plan complexe un plan affine euclidien P rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Définition

A tout nombre complexe $z = a + ib$, on peut lui associe un point unique $M(a, b)$ de coordonnées (a, b), appelé point image de z et on le note $M(z)$.

A tout point $M(a, b)$ de coordonnées (a, b) du plan, on peut lui associer un unique nombre complexe $z = a + ib$, appelé affixe de M. On le note z_M.

Remarque

1. La notation $M(z)$ se lit alors «M d'affixe z».
2. Le nombre complexe $z = 0$ a pour image le point O.

Théorème

Soit P un plan rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

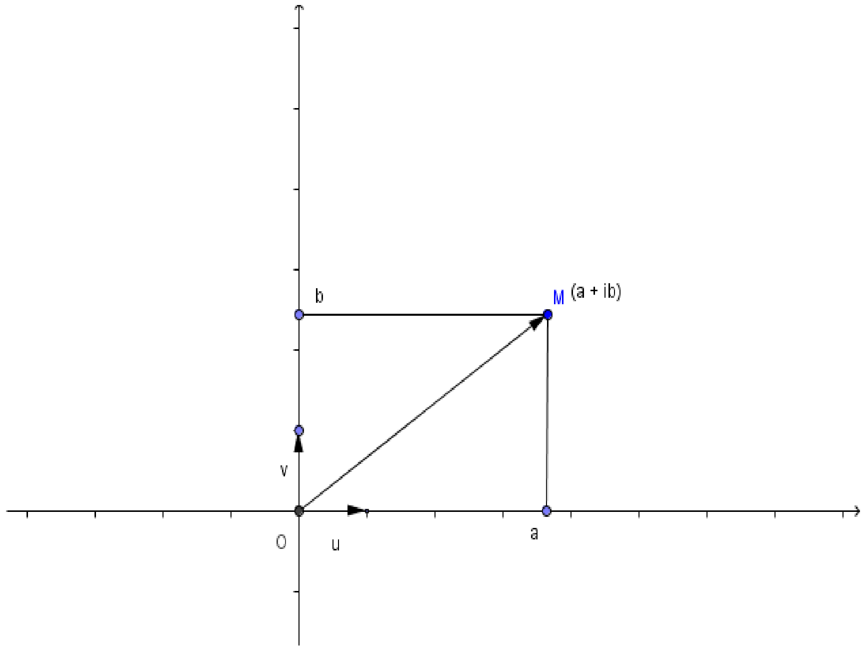
- A tout nombre complexe $z = a + ib$, on peut lui associe un vecteur unique $\overrightarrow{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$. appelé vacteur image de z et on le note $\overrightarrow{OM}(z)$.
- A tout vecteur $\overrightarrow{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$ du plan, on peut lui associer un unique nombre complexe $z = a + ib$, appelé affixe de M. On le note z_M.

Remarque

1. Si $M(z)$ est un point d'affixe z, alors le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est l'image de z.
2. Le complexe $z = 0$ a pour image le vecteur nul.
3. Deux points du plan sont confondus si et seulement si ils ont même affixe.
4. z est réel si et seulement si $M(z)$ appartient à l'axe des abscisses.
5. z est imaginaire pur si et seulement si $M(z)$ appartient à l'axe des ordonnées.

Les nombres complexes

Ainsi : l'axe des abscisses sera appelé axe réel et l'axe des ordonnées sera appelé axe imaginaire.



Propriété

Soit $\vec{w}$ un vecteur du plan tel que $\vec{w} = \overrightarrow{AB}$ où A et B sont deux points du plan. On a :

$$z_{\vec{w}} = z_B - z_A$$

où z_B et z_A sont les affixes respectives de B et A.

Propriété

1. $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$ où z_B et z_A sont les affixes respectives de B et A.
2. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan ayant pour affixe z et z' respectivement.

   $\vec{u} + \vec{v}$ a pour affixe $z + z'$;

   Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \vec{u}$ a pour affixe λz.

Exemple

- Soit α, β, γ des réels tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et A, B, C trois points du plan affectés des coefficients α, β et γ. Le barycentre G du système $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$ a pour affixe : $z_G = \dfrac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$.

- En particulier si I est le milieu de [AB], on a : $z_I = \dfrac{1}{2}(z_A + z_B)$.

C- Module d'un nombre complexe

Définition

Soit $z = a + ib$, on appelle $\overline{z} = a - ib$ le complexe conjugué de z.

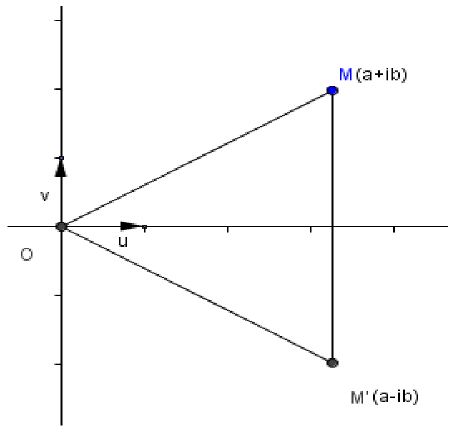
On a appelle module d'un nombre complexe $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ le réel positif noté $|z|$ définie par :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Remarque

1. Soit M l'image de $z = a + ib$ et M′ l'image de $\overline{z} = a - ib$. Alors M et M′ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

2. L'interprétation géométrique du module est donné par la relation : $|z| = \|\overrightarrow{OM}\|$. Cette relation vient du théorème de Pythagore.



3. Soit $z = a \in \mathbb{R}$, alors le module de z est :

$$|z| = \sqrt{a^2} = |a|.$$

Donc pour un réel, le module coïncide avec la valeur absolue, ce qui légitime la notation.

4. On a :

- $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \overline{z_1} = \overline{z_2}$;
- $z_1 = z_2 \Rightarrow |z_1| = |z_2|$.

On fait attention à ne pas confondre équivalence et implication!

Les nombres complexes

Exemples

- $\overline{3-5i} = 3 + 5i$, $\overline{18} = 18$, $\overline{-8i} = 8i$.
- $|1 + i| = \sqrt{2}$, $|i| = 1$, $|-1 - \sqrt{2}\, i| = \sqrt{3}$.
- Cherchons l'ensemble des nombres complexes z tel que $z^2 = |z|$.

Posons $z = x + iy$, alors on a :

$$z^2 = |z| \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ x^2 - y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

On a deux cas à examiner :

- Si $x = 0$, alors : $-y^2 = \sqrt{y^2} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z = 0$;
- Si $y = 0$, alors $x^2 = \sqrt{x^2}$, ce qui implique :

$$x^4 = x^2 \Rightarrow x^2(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = -1.$$

Donc on a soit $z = 0$, soit $z = 1$ ou soit $z = -1$. Comme on a une implication, on vérifie que ces solutions vérifient bien $z^2 = |z|$. Il se trouve que c'est la cas.

- Soit z un complexe. Déterminons l'ensemble $D = \{M(z) \in P, |z| = 3\}$.

On écrit : $|z| = OM$. Alors $|z| = 3 \Leftrightarrow OM = 3$.

Donc D est un cercle de centre O et de rayon 3.

On peut aussi utiliser la forme algébrique pour résoudre ce problème :

posons $z = x + iy$, x et y réels , on a :

$$|z| = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 9 = 0.$$

C'est l'équation du cercle de centre (0, 0) et de rayon 3.

Propriété

Si $z = a + ib$, alors $z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$.

Remarque

En particulier, on a :

- $|z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \dfrac{1}{z}$.
- $z^2 = |z|^2 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

Les nombres complexes

Propriété

1. Le conjugué de $\bar{z}$ est $\bar{\bar{z}} = z$.
2. z est réel $\Leftrightarrow$ $\bar{z} = z$.
3. z est imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $\bar{z} = -z$.
4. $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}$.

Remarque

Il est peut-être commode retenir sous la forme suivante: soit $z = a + ib$. On a :

1. $z + \bar{z} = 2a = 2.\mathrm{Re}(z)$ donc $z + \bar{z}$ est un réel
2. $z - \bar{z} = 2ib = 2i.\mathrm{Im}(z)$ donc $z - \bar{z}$ est imagiaire pur.

Propriété

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
2. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$
3. $\overline{\lambda z} = \lambda \bar{z}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. $\overline{z^n} = \bar{z}^n$, $n \in \mathbb{Z}$ ($z \neq 0$ si $n < 0$)
5. $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\bar{z}}$ et $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Remarque

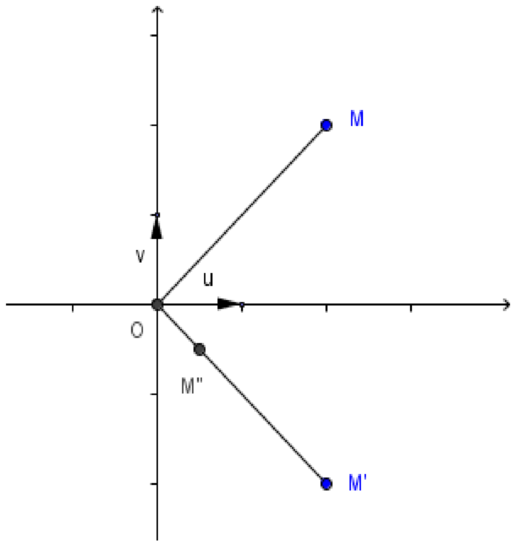
1. Les résultats s'étendent à la somme ou au produit de n nombres complexes.
2. Voici une méthode de recherche de l'écriture algébrique d'un quotient : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{z\bar{z}}$.

   Par exemple, on a :

$$\frac{3+i}{2-4i} = \frac{(3+i)(2+4i)}{(2-4i)(2+4i)} = \frac{2+14i}{20} = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}i.$$

3. $M''(\dfrac{1}{z})$ est situé sur la demi-droite

   O et qui contient $M'(\bar{z})$:



Les nombres complexes

Propriété

1. $|\bar{z}| = |-z| = |z|$.
2. $z \in \mathbb{C}$, $|z| \geq 0$ et $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
3. $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$, $|zz'| = |z|.|z'|$.
4. $|\lambda z| = |\lambda|.|z|$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
5. $z \in \mathbb{C}^*$, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$
6. $|z^n| = |z|^n$, $n \in \mathbb{Z}$ ($z \neq 0$ si $n \leq 0$)
7. $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$, $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire).

Exemple

❑ Soit $z = \left(\frac{1+2i}{1-i}\right)^4$

On a : $|z| = \left|\frac{1+2i}{1-i}\right|^4 = \frac{|1+2i|^4}{|1-i|^4} = \frac{25}{4}$.

❑ Cherchons l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tel que : $|z - 1 + 3i| = |\bar{z} + 8 - 9i|$.

Utilisons la relation: $|\bar{z}| = |z|$. On a :

$$|z - 1 + 3i| = |\bar{z} + 8 - 9i| \Leftrightarrow |z - 1 + 3i| = |\overline{z + 8 + 9i}|.$$

$$\Leftrightarrow |z - 1 + 3i| = |z + 8 + 9i|$$

$$\Leftrightarrow |z - (1 - 3i)| = |z - (8 - 9i)|$$

Considérons le point A($1 - 3i$), B($-8 - 9i$) et M(z). On est ramener à chercher M tel que: AM = BM.

L'ensemble des points cherchés est la médiane de [AB].

❑ Cherchons l'ensemble des nombres complexes z tel que : $(z + 2i)(\bar{z} - 2i) = 4$.

Nous allons donner deux méthodes.

1ère *méthode*

$$(z + 2i)(\bar{z} - 2i) = 4 \Leftrightarrow (z + 2i)(\overline{z + 2i}) = 4$$

$$\Leftrightarrow |z + 2i|^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow |z - (-2i)| = 2.$$

Considérons le point A($-2i$) et M(z), alors on est ramené à chercher les points M tels que : AM = 2.

C'est un cercle de centre A et de rayon 2.

Les nombres complexes

$2^{ème}$ *méthode*

On peut aussi utiliser la forme algébrique. Soit $z = a + ib$ et calculons:

$$\begin{aligned}
(z + 2i)(\bar{z} - 2i) = 4 &\Leftrightarrow z\bar{z} - 2iz + 2i\bar{z} = 0\\
&\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2i(z - \bar{z}) = 0\\
&\Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2i(2ib) = 0\\
&\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 4b = 0\\
&\Leftrightarrow a^2 + (b - 2)^2 - 4 = 0.
\end{aligned}$$

C'est l'équation d'un cercle de centre (0, 2) et de rayon 2.

Exemple

❑ Cherchons l'ensemble des points M(z) tels que : $\left|\dfrac{z-2i}{z-1+i}\right| = 1$. On a :

$$\left|\frac{z-2i}{z-1+i}\right| = \left|\frac{z-2i}{z-(1-i)}\right|.$$

On considère les points A($2i$) et B($1 - i$), alors :

$$\left|\frac{z-2i}{z-1+i}\right| = \frac{\text{AM}}{\text{BM}} = 1 \Leftrightarrow \text{BM} \neq 0 \text{ et AM} = \text{BM}.$$

L'ensemble cherché est la médiatrice de [AB].

❑ Cherchons l'ensemble des nombres complexes z tels que : $|z - 2i| = 2|z + 2i|$.

Considérons les points M(z), A($2i$) et B($-2i$). On a :

$$\begin{aligned}
|z - 2i| = 2|z + 2i| &\Leftrightarrow \text{AM} = 2\text{BM}\\
&\Leftrightarrow \text{AM}^2 - 4\text{BM}^2 = 0\\
&\Leftrightarrow (\overrightarrow{\text{AM}} - 2\,\overrightarrow{\text{BM}})(\overrightarrow{\text{AM}} + 2\,\overrightarrow{\text{BM}}) = 0
\end{aligned}$$

Soit I = Bar{(A, 1), (B, 2)} et J = Bar{(A, 1), (B, 2)}. On a :

$$(\overrightarrow{\text{AM}} - 2\,\overrightarrow{\text{BM}})(\overrightarrow{\text{AM}} + 2\,\overrightarrow{\text{BM}}) = 0 \Leftrightarrow -\,\overrightarrow{\text{IM}}\,.3\,\overrightarrow{\text{JM}} = 0 \Leftrightarrow \text{M} \in \mathcal{C}([\text{IJ}]).$$

Les nombres complexes

D) Argument et forme trigonométrique

Définition

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ d'image vectorielle $\overrightarrow{OM}$. On appelle argument de z, noté arg(z), une mesure quelconque exprimée en radian de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$: arg $z = \widehat{(\vec{u}, \overrightarrow{OM})}$ $[2\pi]$.

Remarque

1. 0 n'a pas d'argument. Donc ne pas parler d'argument pour 0!
2. Deux arguments d'un nombre complexe diffèrent d'un multiple de 2π. Si α et θ sont deux arguments de z, on a : $\alpha = \theta$ $[2\pi]$. Les arguments d'un nombre complexe non nul sont les nombres de la orme $\theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et θ l'un quelconque de ses arguments.

Exemple

arg $1 = 0$ $[2\pi]$, arg $i = \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$, arg$(1 + i) = \frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$.

Propriété

1. Si arg $z = 0$ $[2\pi] \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_+^*$.
2. Si arg $z = \pi$ $[2\pi] \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_-^*$.
3. Si arg $z = \frac{\pi}{2}$ $[\pi] \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}^*$.

Remarque

On peut expliciter encore plus la propriété 3°) :

- $y \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(iy) = \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$;
- $y \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(iy) = \frac{3\pi}{2}$ $[2\pi]$.

Exemple

Construire l'ensemble des points M(z) tel que $\arg(z) = \frac{3\pi}{4}$ $[2\pi]$.

On a : $\arg(z) = \frac{3\pi}{4}$ $[2\pi] \Leftrightarrow \widehat{(\vec{u}, \overrightarrow{OM})} = \frac{3\pi}{4}$ $[2\pi]$.

L'ensemble cherché est la demi droite privée de son origine O de vecteur directeur $\vec{w}(-1 + i)$.

Théorème

Soit z un nombre complexe non nul et M son image dans un plan P. On a :

$$z = |z|.(\cos\theta + i.\sin\theta) \text{ avec } \theta = \widehat{(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})} \ [2\pi].$$

Réciproquement si le nombre complexe z s'écrit $z = r.(\cos\theta + i.\sin\theta)$ avec $r > 0$ et θ réel, alors :

$$r = |z| \quad \text{et} \quad \theta = \widehat{(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})} \ [2\pi].$$

Remarque

L'hypothèse $r > 0$ est essentielle. Si il est strictement négatif, il faudra écrire :

$$z = -r.(-\cos\theta + i(-\sin\theta)).$$

On cherche alors φ tel que $\cos\varphi = -\cos\theta$ et $\sin\varphi = -\sin\theta$. Dans ce cas, on pose $|z| = -r > 0$ et on a :

$$z = |z|.(\cos\varphi + i.\sin\varphi) \text{ avec } \varphi = \pi + \theta\ [2\pi].$$

Théorème

Soit z un nombre complexe non nul. Il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in [0, 2\pi]$ tel que: $z = r.(\cos\theta + i.\sin\theta)$.

Définition

- L'écriture $z = r(\cos\theta + i.\sin\theta)$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in [0, 2\pi]$ est appelée forme trigonométrique de z.
- On peut toujours choisir θ dans l'intervalle $]-\pi, \pi[$. On dit dans ce cas que θ est l'argument principal.

Remarque

1°) Attention : la forme trigonométrique est de la forme $r(\cos\theta + i\sin\theta)$, c'est-à-dire que la partie réelle est un cosinus et la partie imaginaire un sinus. En plus de cela, cos et sin agissent sur le même réel θ.

Ainsi l'écriture $\sin\frac{\pi}{5} + i.\cos\frac{\pi}{5}$ n'est pas une forme trigonométrique. Pour passer à la forme trigonométrique, on utilise les formules $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ et $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$. On a alors :

$$\sin\frac{\pi}{5} + i.\cos\frac{\pi}{5} = \cos\frac{3\pi}{10} + i.\sin\frac{3\pi}{10}.$$

Et l'écriture $\cos\frac{3\pi}{10} + i.\sin\frac{3\pi}{10}$ est bien une forme trigonométrique.

2°) Récapitulons :

a- Soit $z = r.(\cos\theta + i.\sin\theta)$. On a deux cas :

- si $r > 0$, alors $|z| = r$ et $\arg z = \theta\ [2\pi]$;
- si $r < 0$, alors $|z| = -r$ et $\arg z = \pi + \alpha\ [2\pi]$

b- Soit $z = r.(\sin\theta + i.\cos\theta)$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors

$$|z| = r \text{ et } \arg z = \frac{\pi}{2} - \theta\ [2\pi].$$

3°) La forme algébrique est mieux adaptée aux calculs avec des sommes et des différences. En revanche, la forme trigonométrique est mieux adaptés dans les calculs de produits et de quotients.

Propriété (relation entre forme cartésien et forme trigonométrique)

Soit $z = a + ib$. On a :

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ et } |z| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Exemple

- Soit $z = -1 + i$. Cherchons sa forme trigonométrique :

$$|z| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow z = \sqrt{2}\,(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}\,(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{2}{\sqrt{2}}).$$

Les nombres complexes

On résout $\{\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\}$ et on trouve $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$.

❑ Soit $z = 1 - i\sqrt{3}$. Cherchons sa forme trigonométrique :

$$|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \Rightarrow |z| = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

On résout $\{\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\}$ et on trouve $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$.

❑ Soit $z = -2 - i2\sqrt{3}$. Cherchons sa forme trigonométrique :

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4 \Rightarrow z = 4(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

On cherche à résoudre $\{\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\}$ et on trouve $\theta = -\dfrac{2\pi}{3}$.

❑ Soit $z = 4(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6})$. Cherchons sa forme cartésienne. Pour cela, calculons :

$$\sin\frac{5\pi}{6} = \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{ et } \cos\frac{5\pi}{6} = \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

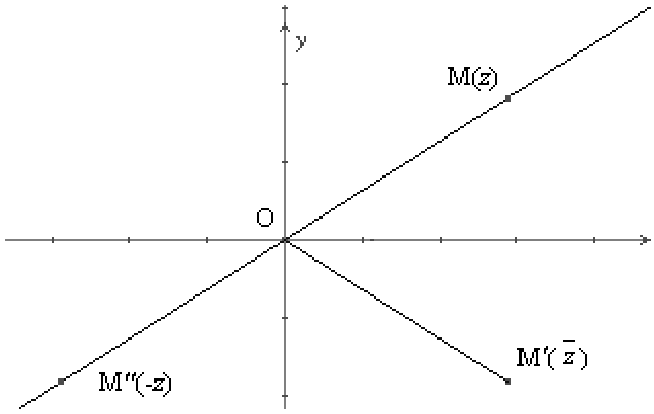
On trouve ainsi : $z = 4(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}) = 2 - 2i\sqrt{3}$.

Propriété

1. $\arg\bar{z} = -\arg z\ [2\pi]$.
2. $\arg(-z) = \arg z + \pi\ [2\pi]$.

Preuve

Il suffit de faire un dessin pour voir que ces relations sont vraies :



Remarque

On peut compléter : $z \in \mathbb{C}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\arg(\alpha z) = \arg(z)\ [2\pi]$ et $\arg(-\alpha z) = \arg(z)\ [2\pi]$.

Exemple

❑ On a : $\arg(i) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \Rightarrow \arg(-i) = \dfrac{3\pi}{2}\ [2\pi]$.

❑ $\arg(1 + i) = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi] \Rightarrow \arg(10(1 + i)) = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

Les nombres complexes

Propriété

Soit z, z_1 et z_2 des nombres complexes non nuls. On a :

1. $\arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)\ [2\pi]$
2. $n \in \mathbb{Z}$, $\arg(z^n) = n.\arg(z)\ [2\pi]$
3. $\arg\frac{1}{z} = -\arg z\ [2\pi]$
4. $\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2\ [2\pi]$.

Exemple

❑ Cherchons $\arg\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{10}$. On a :

$$\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4} \text{ et } \arg(1 - i) = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \arg\frac{1+i}{1-i} = \frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arg\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{10} = 10\frac{\pi}{2}.$$

Donc on trouve : $\arg\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{10} = 5\pi\ [2\pi]$.

❑ Cherchons $\arg(i(\cos\theta - i\sin\theta))$:

$$\arg(i(\cos\theta - i\sin\theta)) = \arg i + \arg(\cos\theta - i\sin\theta)\ [2\pi] = \frac{\pi}{2} - \theta\ [2\pi].$$

❑ Attention à : $\sin\theta + i\cos\theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) + i\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$.

❑ Soit z un nombre complexe de module 5 et d'argument $\frac{3\pi}{4}$, z' un autre nombre complexe de module 2 et d'argument $-\frac{\pi}{4}$. Déterminer le forme trigonométrique de zz' et de $\frac{z}{z'}$.

On a : $|zz'| = |z|.|z'| = 2.5 = 10$ et $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi] = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

De même: $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{5}{2}$ et $\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z')\ \ [2\pi] = \pi\ [2\pi]$.

De l'autre côté, on pose $Z' = -1$, alors : $|Z'| = 1$ et $\arg(Z') = \pi\ [2\pi]$. Donc

$$Z = Z' \Leftrightarrow 2r = 1 \text{ et } \arg Z = \arg Z'\ [2\pi] \Leftrightarrow r = 1 \text{ et } \theta' = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

E) Equations du type z² = a

Théorème

Soit a un nombre complexe non nul d'argument θ. L'équation $z^2 = a$ admet deux solutions dans $\mathbb{C}$ qui sont

$$z_1 = \left[\sqrt{|a|}\ ,\ \frac{\theta}{2}\right] \text{ et } z_2 = \left[\sqrt{|a|}\ ,\ \frac{\theta}{2}+\pi\right].$$

Remarque

Nous avons utiliser pour la démonstration du théorème une méthode trigonométrique. Il existe une méthode algébrique pour calculer la racine d'un nombre complexe. Cherchons à résoudre $z^2 = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. Posons

$$z = x + iy \text{ avec } x, y \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha = a + ib.$$

On a :

$$z^2 = \alpha \Leftrightarrow x^2 - y^2 = a \text{ et } 2xy = b \Leftrightarrow x^2 - y^2 = a,\ \text{signe}(|xy|) = \text{signe}(b) \text{ et } x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}\ .$$

Alors

$$x^2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2+b^2}\ ),\ y^2 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2+b^2}\ ) \text{ et } x^2y^2 = \frac{b^2}{4}$$

D'où $2xy$ et b ont le même carré puisqu'ils ont même signe : $b = 2xy$.

Exemple

❑ Soit l'équation : $z^2 = -5 + 12i$. On pose $z = x + iy$ et on a :

$$z^2 = -5 + 12i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ x^2 + y^2 = 13 \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 8 \\ 2y^2 = 18 \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 9 \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions est : $S = \{2 + 3i, -2 - 3i\}$. On constate que $z_2 = -z_1$.

❑ Soit l'équation : $z^2 = 1 - i$. Posons $z = x + iy$, alors :

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = 1 - i \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1 \text{ et } xy = -\frac{1}{2}.$$

D'autre part, on a :

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = \sqrt{2}.$$

On a donc :

$$z^2 = 1 - i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{2} \\ xy < 0 \end{cases}.$$

On trouve

$$x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \text{ et } y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}.$$

On trouve :

$$z_1 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \text{ et } z_2 = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}.$$