Lycée IBN KHALDOUN- Radès Mr ABIDI Farid	Devoir de contrôle n°1 $4^{\text{ème}}$ M	Durée : 2 heures 29 octobre 2009

Exercice 1: (3 points)

Pour chaque question, répondre par **Vrai** ou **Faux**. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapport 0,5 point ; une réponse inexacte enlève 0,5 points ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

1. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et si pour tout x < 1, on a $g(x) = 2x + \sqrt{1-x}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g\circ f(x) = +\infty$.
2. Soit f une fonction paire définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, $\ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(-x) = -\ell$.
3. Si pour tout x réel strictement négatif, on a : $|f(x) - 3| \leq -\frac{1}{x}$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$.
4. Soit f la fonction définie et continue sur $\mathbb{R}^*$ dont le tableau des variations est :

x	-3		0		2		4
f(x)	1	↗	5	↘	-3	↗	1

   L'image de l'intervalle [-2, 3] par f est [-3, 5].

5. Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et dont la courbe représentative admet , dans un repère du plan, pour asymptote au voisinage de $-\infty$ la droite d'équation y = - x + 1 alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
6. Soit la fonction f définie sur [0, 1] par f(x) = $x - 2\sqrt{x} + 1$. Pour tout x de [0, 1], le réel $f\circ f(x) = x$.

Exercice 2: (7 points)

On note, pour tout entier naturel $n \geq 3$, (E_n) l'équation $\frac{x^3}{x^2-1} = n$.

1. Etudier les variations de la fonction f définie sur $[2, +\infty[$ par f(x) = $\frac{x^3}{x^2-1}$.
2. Montrer que pour tout entier n , $n \geq 3$, l'équation (E_n) possède une unique solution , notée x_n , sur l'intervalle $[2, +\infty[$.
3. Quelle est la monotonie de la suite (x_n) ?
4. Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, $n - 1 \leq x_n \leq n$.
5. En déduire la limite de la suite (x_n) puis de la suite de terme général $\frac{x_n}{n}$.
6. Donner une valeur approchée de x_3 par défaut à près 10^{-1} .

Exercice 3: (5 points)

On considère , dans l'ensemble $\mathbb{C}^*$ des nombres complexes non nuls , l'équation (E) : $z^3=\left(-2-2i\sqrt{3}\right)\overline{z}$.

1. Ecrire sous forme exponentielle le nombre complexe $u=-2-2i\sqrt{3}$.
2. On pose $z=re^{i\alpha}$ où r est un réel strictement positif et α un réel de l'intervalle $\left[0,2\pi\right[$.
   a) Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation $r^2e^{i4\alpha}=4e^{i\frac{4\pi}{3}}$.
   b) En déduire que l'équation (E) admet, dans $\mathbb{C}^*$, quatre solutions que l'on donnera sous forme exponentielle.
3. Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. On note A , B , C et D les images des solutions de (E) d'arguments respectifs α_A , α_B , α_C et α_D vérifient $\alpha_A<\alpha_B<\alpha_C<\alpha_D$.
   a) Placer les points A, B , C et D. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?
   b) Soit E le milieu du segment [AD]. Ecrire l'affixe z_E de E sous forme exponentielle et sous forme algébrique.
   c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 4: (5 points)

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$(d'unité graphique 2cm).

On considère les points E et F d'affixes respectives $z_E=1+i$ et $z_F=\frac{1-i}{2}$.

1. Ecrire z_E et z_F sous forme exponentielle.
2. Montrer que pour tout θ de $\left[0,\pi\right[$, le point M d'affixe $z=e^{2i\theta}$ appartient au cercle (Γ) de centre O et de rayon 1.
3. Montrer que pour tout M de (Γ), $EM\times FM=\left|e^{4i\theta}+1-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\right)e^{2i\theta}\right|$.
4. a) Montrer que pour tout θ de $\left[0,\pi\right[$, $e^{4i\theta}+1=2\cos2\theta.e^{i2\theta}$.
   b) En déduire que $EM\times FM=\sqrt{\frac{1}{4}+\left(2\cos2\theta-\frac{3}{2}\right)^2}$.
5. a) Montrer que pour tout réel θ de $\left[0,\pi\right[$, $\frac{1}{4}\le\frac{1}{4}+\left(2\cos2\theta-\frac{3}{2}\right)^2\le\frac{25}{2}$.
   b) Déterminer l'affixe z_0 du point M_0 correspondant à la valeur maximale de $EM\times FM$.

   Placer le point M_0

Solution

Exercice 1: (3 points)

1. **Faux**

En effet : Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et si pour tout x < 1, on a $g(x) = 2x + \sqrt{1-x}$ alors

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} -2\left(\sqrt{-x}\right)^2 + \sqrt{-x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{-x}\left[-2\sqrt{-x} + \sqrt{1-\frac{1}{x}}\right] = -\infty$$

Donc $\lim_{x\to+\infty} g\circ f(x) = -\infty$.

2. **Faux**

En effet : Si f est une fonction paire définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, $\ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(-x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

3. **Vrai**

Si pour tout x réel strictement négatif, on a : $|f(x)-3| \le -\frac{1}{x}$, on a $\lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{x} = 0$ alors $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$.

4. **Vrai**

En effet : ([-2, 3]) = [-3, 5].

5. **Vrai**

Comme la droite d'équation y = -x + 1 est une asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $-\infty$ alors $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x+1 = +\infty$.

6. **Vrai**

Soit la fonction f définie sur [0, 1] par f(x) = $x - 2\sqrt{x} + 1 = \left(1-\sqrt{x}\right)^2$.

Pour tout x de [0, 1], le réel $f\circ f(x) = f(f(x)) = \left(1-\sqrt{f(x)}\right)^2 = \left(1-\left(1-\sqrt{x}\right)\right)^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$.

Exercice 2: (7 points)

On note, pour tout entier naturel $n \ge 3$, (E_n) l'équation $\frac{x^3}{x^2-1} = n$.

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$.

f est continue et dérivable sur $[2,+\infty[$ et pour tout x de $[2,+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{3x^2\left(x^2-1\right) - 2x.x^3}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2} > 0 .$$

x	2 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
f(x)	$\frac{8}{3}$ $\nearrow$ $+\infty$

2. Soit $n \geq 3$.

   f est continue et strictement croissante sur $[2,+\infty[$, $f\left([2,+\infty[\right)=\left[\frac{8}{3},+\infty\right[$ et $n\in\left[\frac{8}{3},+\infty\right[$.

   Donc l'équation $\left(E_n\right)$ admet sur l'intervalle une unique solution x_n.

   Etudier les variations de la fonction f définie sur $[2,+\infty[$ par $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$.

3. On a pour tout $n\geq 3$, $f\left(x_n\right)=n$ et $f\left(x_{n+1}\right)=n+1$. Donc $f\left(x_{n+1}\right)>f\left(x_n\right)$. Et comme f est strictement croissante sur $[2,+\infty[$ alors nécessairement $x_{n+1}>x_n$. Ainsi la suite $\left(x_n\right)$ est croissante.

4. Pour tout entier $n\geq 3$, On a :

$$f\left(n-1\right)-n=\frac{\left(n-1\right)^3}{\left(n-1\right)^2-1}-n=\frac{\left(n-1\right)^3-n\left(n-1\right)^2+n}{\left(n-1\right)^2-1}=\frac{-\left(n-1\right)^2+n}{\left(n-1\right)^2-1}=\frac{-n^2+3n-1}{\left(n-1\right)^2-1}=\frac{-n\left(n-3\right)-1}{\left(n-1\right)^2-1}<0$$

et $f\left(n\right)=\frac{n^3}{n^2-1}-n=\frac{n^3+n}{n^2-1}>0$

$f\left(n-1\right)<n$ et $f\left(n\right)>n$ donc $f\left(n-1\right)<f\left(x_n\right)<f\left(n\right)$ d'où $n-1\leq x_n\leq n$.

5. Pour tout $n\geq 3$, $x_n\geq n-1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n-1=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty$.

   D'autre part, pour tout $n\geq 3$, $1-\frac{1}{n}\leq\frac{x_n}{n}\leq 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{n}=1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{n}=1$.

6. On sait que $2\leq x_3\leq 3$.

   $f\left(2,5\right)\approx 2,9762$ et $f\left(3\right)=3,375$ donc $2,5<x_3<3$

   $f\left(2,75\right)\approx 3,169$ et $f\left(2,5\right)\approx 2,9762$ donc $2,5<x_3<2,75$

   $f\left(2,6\right)\approx 3,0514$ et $f\left(2,5\right)\approx 2,9762$ donc $2,5<x_3<2,6$

Une valeur approchée de x_3 par défaut à près 10^{-1} est 2,5.

Exercice 3: (5 points)

On considère , dans l'ensemble $\mathbb{C}^*$ des nombres complexes non nuls , l'équation (E) :
$z^3=\left(-2-2i\sqrt{3}\right)\bar{z}$.

1. $u=-2-2i\sqrt{3}=4\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=4e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

2. On pose $z=re^{i\alpha}$ où r est un réel strictement positif et α un réel de l'intervalle $[0,2\pi[$.

   a) (E) $\Leftrightarrow r^3e^{3i\theta}=\left(-2-2i\sqrt{3}\right)re^{-i\theta}\Leftrightarrow r^2e^{4i\theta}=4e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

   b) (E) $\Leftrightarrow r^2e^{4i\theta}=4e^{i\frac{4\pi}{3}}\Leftrightarrow\begin{cases}r^2=4\\4\theta=\frac{4\pi}{3}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}r=2\\\theta=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}\ ,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

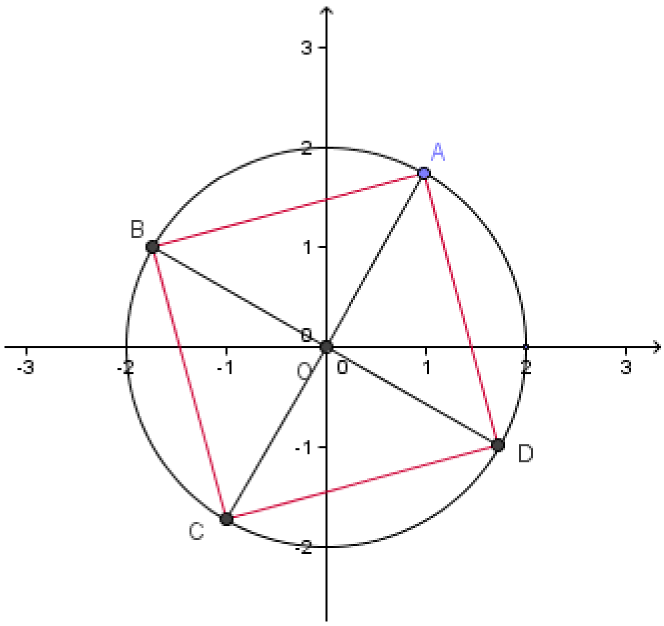
   Les solutions de (E) , dans $\mathbb{C}^*$, sont :

   $z_0=2e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_1=2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)}=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$, $z_3=2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)}=2e^{i\frac{4\pi}{3}}$ et $z_4=2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}\right)}=2e^{i\frac{11\pi}{6}}$.

3. Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

   On note A , B , C et D d'affixes respectives $z_A=2e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_B=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$, $z_C=2e^{i\frac{4\pi}{3}}$ et $z_D=2e^{i\frac{11\pi}{6}}$.

   a)



   $z_C=2e^{i\frac{4\pi}{3}}=-2e^{i\frac{\pi}{3}}=-z_A$ et $z_D=2e^{i\frac{11\pi}{6}}=-2e^{i\frac{5\pi}{6}}=-z_B$ donc O est le milieu des segments [AC] et [BD] donc ABCD est un parallélogramme inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 2 d'où ABCD est un rectangle.

   Comme AC = $|z_C-z_A|=2|z_A|=4$ et BD = $|z_D-z_B|=2|z_B|=4$ alors ABCD est un carré.

   b) Soit E le milieu du segment [AD]. l'affixe de E est $z_E=\frac{z_A+z_D}{2}$.

   Le module de z_E est $|z_E|=OE=\frac{OA}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

Un argument de z_E est $\arg(z_E) \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OE}}\right)[2\pi]$.

$$\arg(z_E) \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OA}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OE}}\right)[2\pi] \Leftrightarrow \arg(z_E) \equiv \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}}\right)[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg(z_E) \equiv \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}[2\pi] \quad .$$

$$\Leftrightarrow \arg(z_E) \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$$

D'où $z_E = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

D'autre part : $z_E = \frac{z_A + z_D}{2} = \frac{1+i\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}-i\right)}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

c) On en déduit : $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 4: (5 points)

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$(d'unité graphique 2cm).

On considère les points E et F d'affixes respectives $z_E = 1+i$ et $z_F = \frac{1-i}{2}$.

1. $z_E = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_F = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.
2. Pour tout θ de $[0,\pi[$, $OM = |z| = \left|e^{2i\theta}\right| = 1$donc M appartient au cercle (Γ) de centre O et de rayon 1.
3. Soit M un point de (Γ), on a :

$$EM \times FM = \left|e^{i2\theta} - (1+i)\right| . \left|e^{i2\theta} - \frac{(1-i)}{2}\right| = \left|\left[e^{i2\theta} - (1+i)\right] . \left[e^{i2\theta} - \frac{(1-i)}{2}\right]\right|$$

$$= \left|e^{i4\theta} + \frac{(1+i)(1-i)}{2} - \left(1+i+\frac{1-i}{2}\right)e^{i2\theta}\right| = \left|e^{4i\theta} + 1 - \left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\right)e^{2i\theta}\right|$$

4. a) Pour tout θ de $[0,\pi[$, $e^{4i\theta} + 1 = \left(e^{i2\theta}\right)^2 + e^{i2\theta}.e^{-i2\theta} = \left(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}\right)e^{i2\theta} = 2\cos 2\theta . e^{i2\theta}$.

   b) Il en résulte que, pour tout θ de $[0,\pi[$,

$$EM\times FM=\left|e^{4i\theta}+1-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\right)e^{2i\theta}\right|=\left|2\cos 2\theta\, e^{i2\theta}-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\right)e^{2i\theta}\right|=\left|e^{i2\theta}\right|\left|2\cos 2\theta-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\right)\right|$$

$$=\left|2\cos 2\theta-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+\left(2\cos 2\theta-\frac{3}{2}\right)^2}\,.$$

5. a) Pour tout réel θ de $[0,\pi[$,

$$-1\le\cos 2\theta\le 1\Leftrightarrow -2\le 2\cos 2\theta\le 2\Leftrightarrow -\frac{7}{2}\le 2\cos 2\theta-\frac{3}{2}\le\frac{1}{2}$$

donc $0\le\left|2\cos 2\theta-\frac{3}{2}\right|\le\frac{7}{2}$ d'où $0\le\left(2\cos 2\theta-\frac{3}{2}\right)^2\le\frac{49}{4}$

ou encore $\frac{1}{4}\le\frac{1}{4}+\left(2\cos 2\theta-\frac{3}{2}\right)^2\le\frac{25}{2}$

b) $EM\times FM$ est maximum $\Leftrightarrow\frac{1}{4}+\left(2\cos 2\theta-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{2}\Leftrightarrow\cos 2\theta=-1$.

Comme $\theta\in[0,\pi[$ alors $2\theta\in[0,2\pi[$ et par suite, $2\theta=\pi\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{2}$.

Donc l'affixe z_0 du point M_0 correspondant à la valeur maximale de $EM\times FM$ est $z_0=e^{i\pi}=-1$.