Exemples d'études de fonctions

Plan d'étude d'une fonction

- ensemble de définitions.
- parité (s'il y a lieu).
- limites aux bornes de l'ensemble de définition ou d'étude.
- dérivée , signe de la dérivée et tableau de variations.
- branches infinies : asymptotes et branches paraboliques.
- tracé de la courbe avec asymptotes et extrema.

Exemple 1 :

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{10x}{x^2+1}$. On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

Pour tout x réel , $f(-x)=\dfrac{-10x}{x^2+1}=-f(x)$ donc f est impaire.

IL suffit d'étudier f sur $\mathbb{R}^+$ (la moitié positive de son ensemble de définition).

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{10x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{10}{x}=0$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout x de $\mathbb{R}^+$,

$$f'(x)=\frac{10\left(x^2+1\right)-10x.(2x)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-10x^2+10}{\left(x^2+1\right)^2}=-10\left(x-1\right)\frac{x+1}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

$$\begin{cases} f'(x)=0 \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

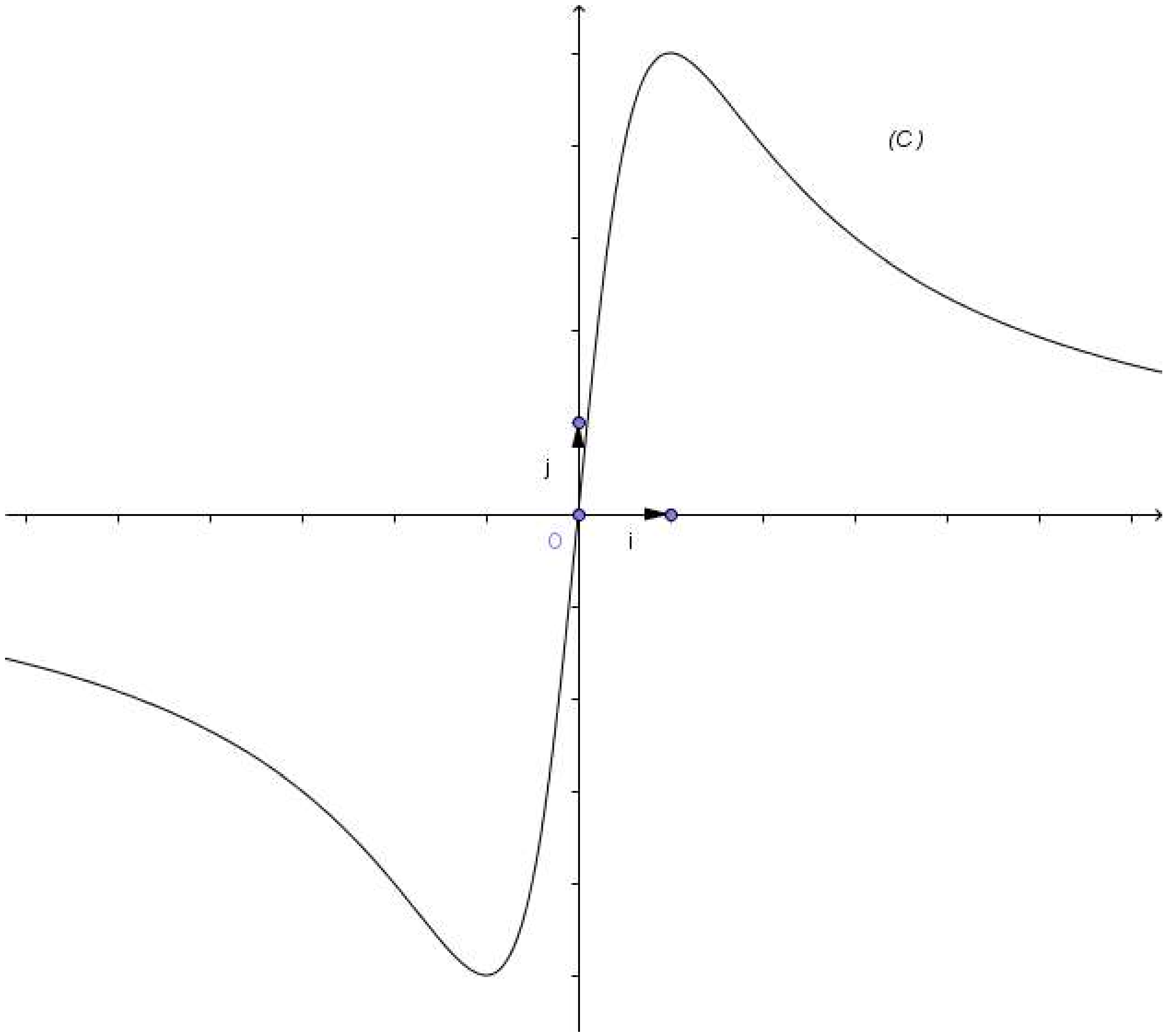
Le signe de f'(x) sur $\mathbb{R}^+$ est celui de -(x – 1) = - x +1

Le tableau de variation sur $\mathbb{R}^+$:

x	0		1		$+\infty$
f '(x)		+	0	-	
f(x)	0	↗	5	↘	0

La droite des abscisses est asymptote à la courbe (C) de f au voisinage de $+\infty$.

La courbe (C) est symétrique par rapport à O l'origine du repère.



Exemple 2

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$.

$\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$ est symétrique par rapport à 0 et pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$, f(-x) = f(x) donc

f est paire d'où il suffit d'étudier f sur $\mathbb{R}^+\cap\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}=\mathbb{R}^+\setminus\{2\}=[0,2[\cup]2,+\infty[$.

Exemples d'études de fonctions

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$.

Du tableau de signe de x^2-4,

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

on en déduit que : $\lim\limits_{x\to2^+} x^2-4 = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to2^-} x^2-4 = 0^-$.

IL en résulte que : $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = -\infty$.

Pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$, $f(x) = \frac{x^2-4+4}{x^2-4} = 1 + \frac{4}{x^2-4} = 1 + \frac{4}{(x-2)(x+2)}$.

$$f(x) = 1 + \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2} = 1 + \frac{a(x+2)+b(x-2)}{(x-2)(x+2)} = 1 + \frac{(a+b)x+2a-2b}{x^2-4}$$

D'où et par identification :

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 2a-2b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a-b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=2 \\ 2b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}.$$

Par suite, pour tout de $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$, $f(x) = 1 + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$ et pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$, $f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} - \left(-\frac{1}{(x+2)^2}\right)$

$$= \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{(x-2)^2-(x+2)^2}{(x-2)^2(x+2)^2}$$

$$= \frac{-8x}{(x^2-4)^2} \quad \leq 0$$

$$\begin{cases} f'(x)=0 \\ x\in\mathbb{R}^+\setminus\{2\} \end{cases} \Leftrightarrow x=0$$

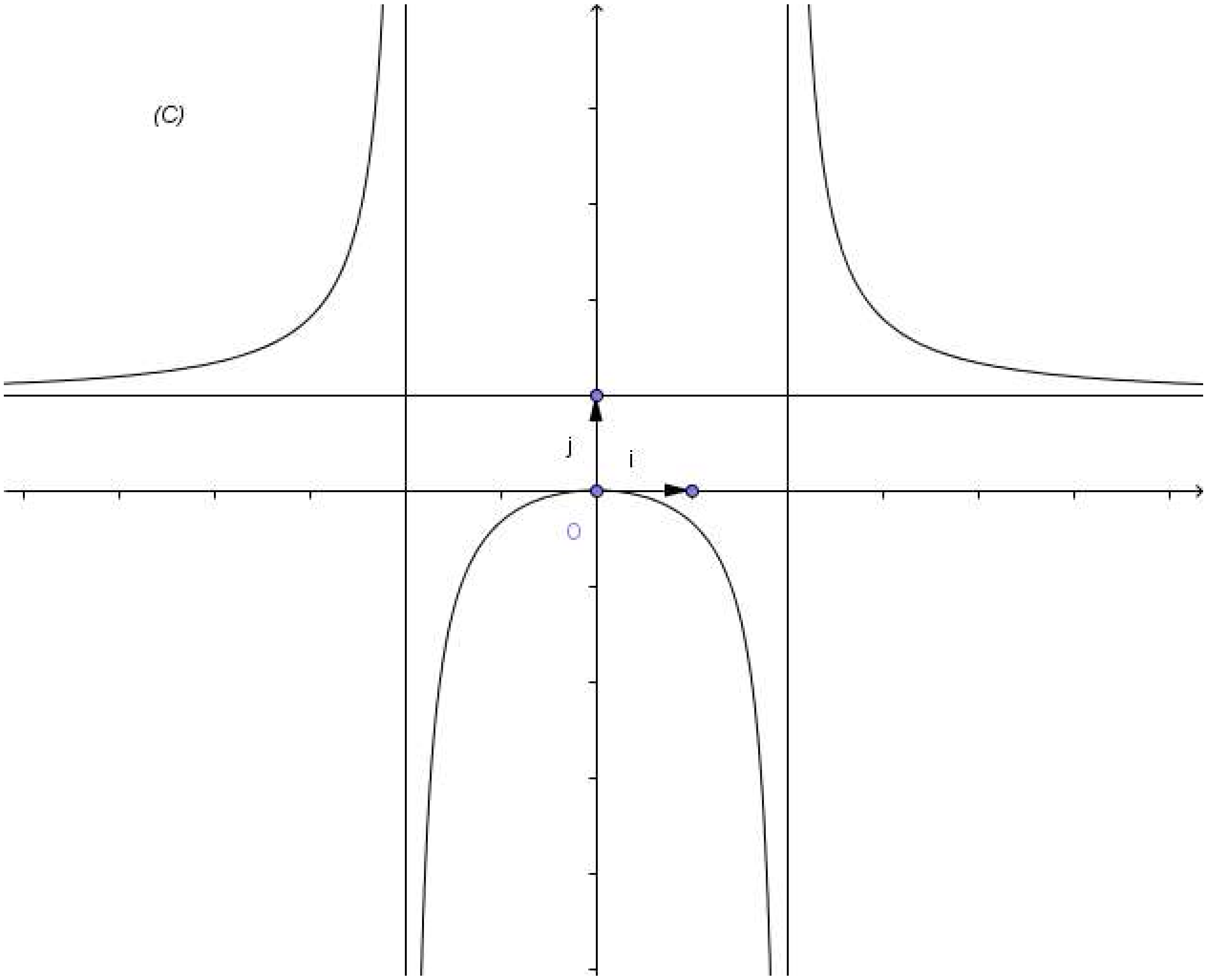
D'où le tableau de variation de f est :

x	0		2		$+\infty$
f '(x)		-	‖	-	
f(x)	0 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1

Exemples d'études de fonctions

On a : $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = 2$ est asymptote à (C)

et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$ donc la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.



Exemple 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{-x^3+5x}{x^2+3}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.

L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

Pour tout réel , $f(-x) = \dfrac{x^3-5x}{x^2+3} = -f(x)$ donc f est impaire d'où il suffit d'étudier f sur $\mathbb{R}^+$.

Exemples d'études de fonctions

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout x de $\mathbb{R}^+$,

$$f'(x) = \frac{(-3x^2+5)(x^2+3)-2x(-x^3+5x)}{(x^2+3)^2} = \frac{-x^4-14x^2+15}{(x^2+3)^2} = -\frac{(x^2-1)(x^2+15)}{(x^2+3)^2}$$

d'où $\quad f'(x) = -(x-1)\frac{(x+1)(x^2+15)}{(x^2+3)^2}$.

$\begin{cases} f'(x)=0 \\ x\in\mathbb{R}^+ \end{cases} \Leftrightarrow x=1$

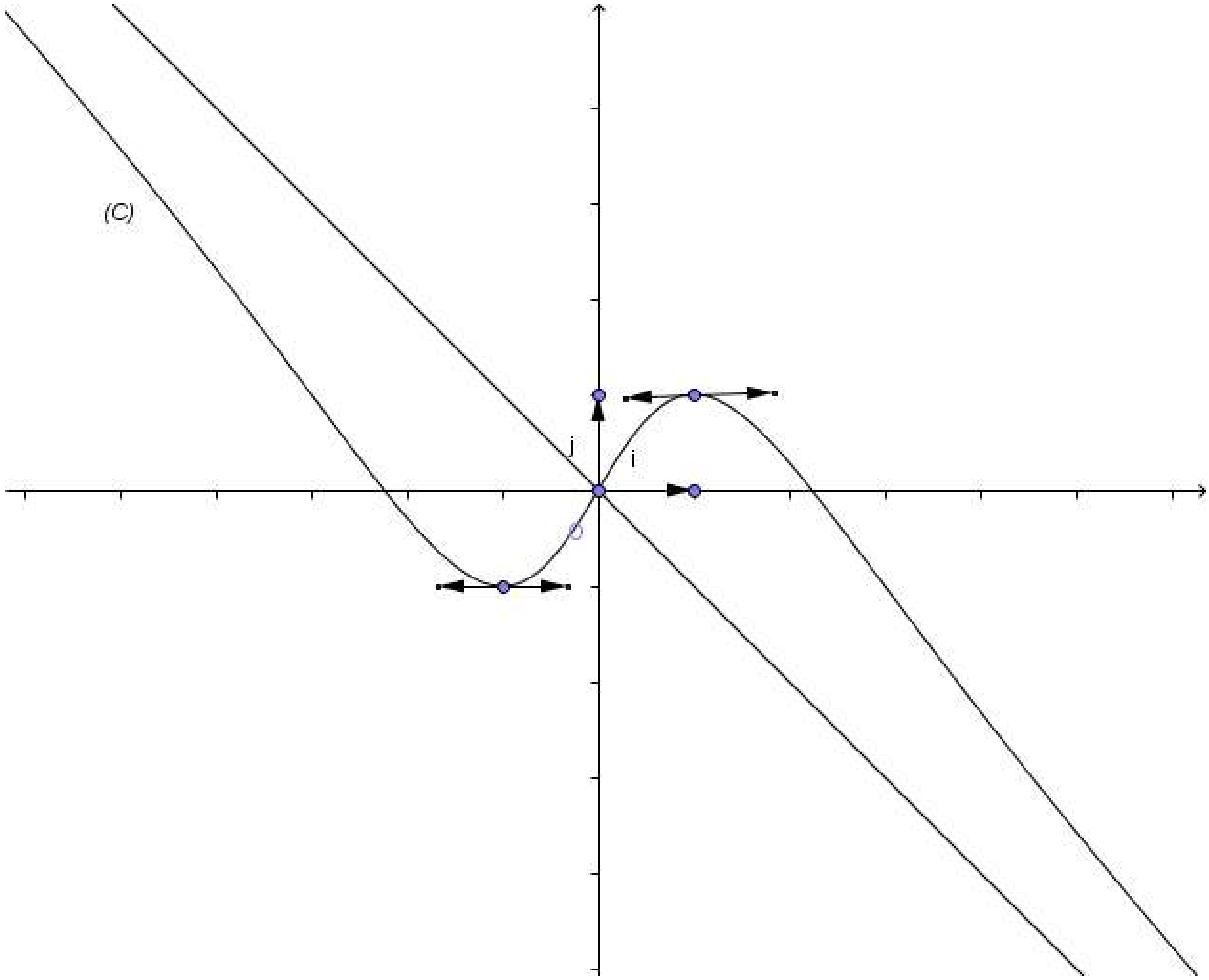
x	0		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	
f(x)	0	↗	-1	↘	$-\infty$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x^2+5}{x^2+3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} -1 = -1$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(-x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-x^3+5x}{x^2+3}+x = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{8x}{x^2+3x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{8x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{8}{x} = 0$

Donc la droite d'équation y = - x est asymptote oblique à la courbe ($\mathcal{C}$) au voisinage de $+\infty$.

Exemples d'études de fonctions



Exemple 4

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{x}{2}-1+\frac{2}{x^2}$

f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$.

f es dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout x non nul , $f'(x)=\frac{1}{2}+2\left(\frac{-2}{x^3}\right)=\frac{1}{2}-\frac{4}{x^3}=\frac{x^3-8}{2x^3}$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^3-8=0 \Leftrightarrow x^3=8 \Leftrightarrow x=2$.

Dressons le tableau de signe de f '(x) :

$2x^3$ est du signe de x et x^3-8 est du signe de $x-2$, il en résulte :

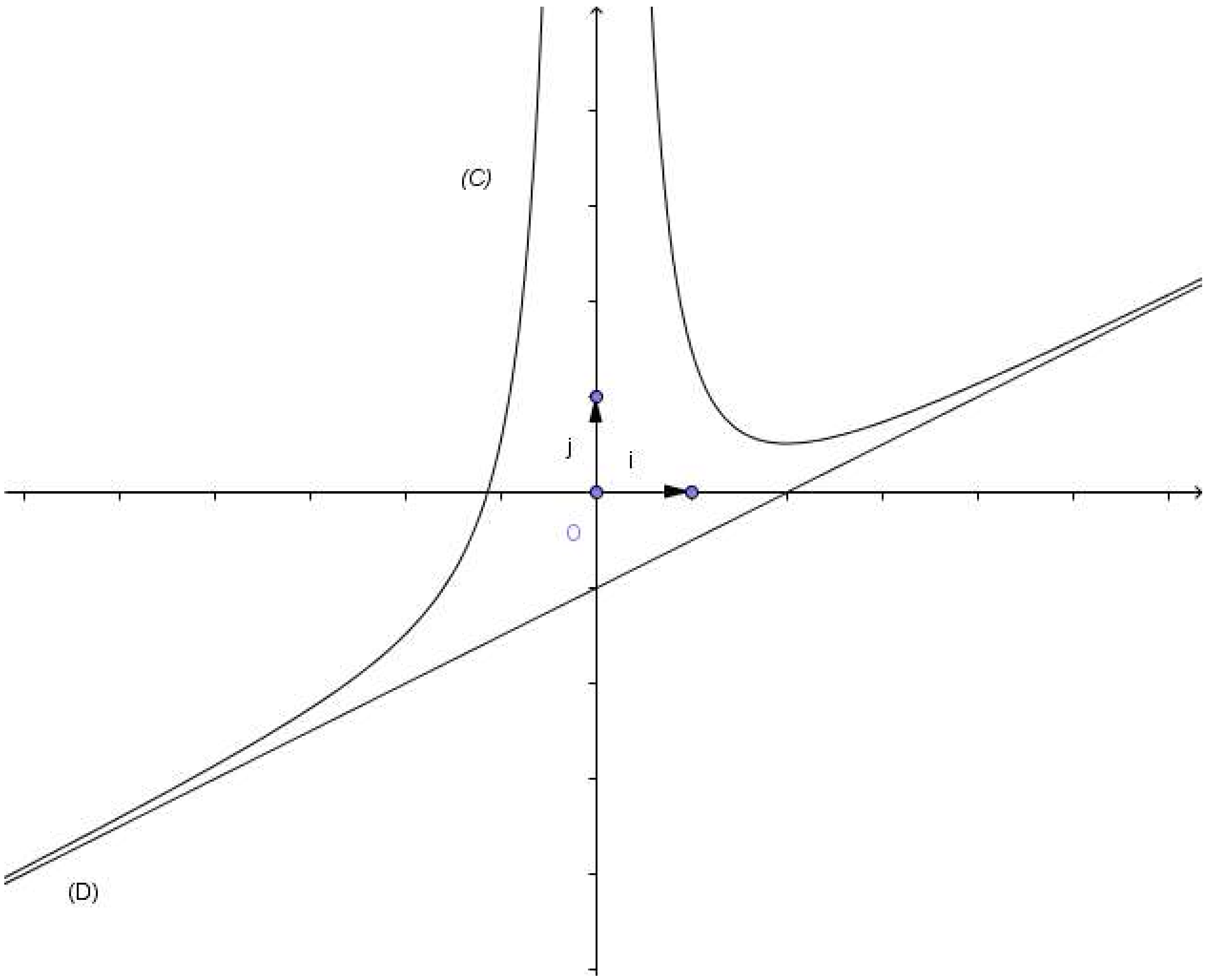
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x^3-8		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$2x^3$		$-$	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

D'où :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ donc la droite des ordonnées est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.

$\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) - \left(\frac{x}{2}-1\right) = \lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{2}{x^2} = 0$ donc la droite (D) d'équation $y = \frac{x}{2}-1$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C})$.


(C)
j
i
O
(D)