Accroissements finis

Théorème de Rolle:

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et dérivable sur]a, b[avec a < b.

Si f (a) = f (b) alors il existe c $\in$]a, b[tel que : f'(c) = 0 .

Théorème des accroissements finis:

Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur] a, b [avec a < b , alors il existe au moins un réel c $\in$]a, b[tel que : f (b) – f (a) = f'(c) (b-a) .

Inégalités des accroissements finis:

Soit f une fonction continue sur l' intervalle [a, b] et dérivable sur]a,b[tels que a < b.
S'il existe deux réels m et M vérifiant : m $\leq$ f (x) $\leq$ M pour tout x de]a, b[,
alors on a : m (b-a) $\leq$ f (b) – f (a) $\leq$ M (b- a)

Corollaire des inégalités des accroissements finis:

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que pour tout x de I , il existe un réel k strictement positif tel que : $|f'(x)| \leq k$ alors ; Pour tous a et b réels de I on a :

$$|f(b)-f(a)| \leq k|b-a| \ .$$

Exercices d'applications

Exercices 1

Soit la fonction f $(x) = \sin 2x - 3\cos x$.

1. Justifier le fait que *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer f ' (x) pour tout x réel .
2. Montrer, en utilisant le théorème des accroissements finis qu'il existe un réel de *c* de $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $2\cos 2c + 3\sin c = \dfrac{9-3\sqrt{3}}{\pi}$.

Accroissements finis

Solution:

Les fonctions $x \mapsto \sin 2x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x réel, $f'(x) = 2\cos 2x + 3\sin x$.

Si f est continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, il existe un $c \in]a, b[$ tel que l'on ait : $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(b)}{b-a}$.

f est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur l'intervalle fermé $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur l'intervalle ouvert $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Le théorème des accroissements finis permet alors d'affirmer qu'il existe $c \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{3}\right)}{\frac{\pi}{6}} = \frac{9-3\sqrt{3}}{\pi}\ .$$

Exercice 2

1. Démontrer que pour tout x réel , $|\sin x| \le |x|$.
2. Quelle est la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = n\sin\frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution:

1. La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour totu x réel, sin'(x) = cos x donc pour tout x réel, $|\cos x| \le 1$.
   Ainsi, pour tout x réel, $|\sin x - \sin 0| \le |x - 0| \Leftrightarrow |\sin x| \le |x|$.
2. On peut écrire : pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\left|\sin\frac{1}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ d'où $|u_n| \le \frac{1}{n}$.

   Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.$

Accroissements finis

Exercice 3

Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$, dérivable dans $]0, +\infty[$, telle que $f(0) = 0$.

On désigne par g la fonction définie, pour tout $x > 0$, par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$

1. Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et exprimer $g'(x)$ pour tout $x > 0$.
2. Montrer que si f' est croissante sur $]0, +\infty[$, il en est de même de g.

Solution.

1. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et la fonction $x \mapsto x$ est dérivable et non nulle sur $]0, +\infty[$ donc la fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Pour tout x de $]0, +\infty[$, $g'(x) = \dfrac{1}{x} f'(x) - \dfrac{1}{x^2} f(x)$.

2. Soient x et y des éléments quelconques de $]0, +\infty[$, vérifiant $x < y$.

Comme g est continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$, le **théorème des accroissements finis** indique qu'il existe un c tel que :

$$\begin{aligned} g(y) &= g(x) + (y-x)\, g'(c), \text{ avec } x < c < y. \\ &= g(x) + (y-x)\,\frac{1}{c}\,(f'(c) - g(c)) \\ &= g(x) + \frac{1}{c}\,(y-x)\left(f'(c) - \frac{f(c)}{c}\right) \end{aligned}$$

Comme f est continue sur $[0, c]$ et dérivable sur $]0, c[$, et que $f(0) = 0$, le **théorème des accroissements finis** indique qu'il existe un d tel que :

$$f'(d) = \frac{f(c)}{c}, \text{ avec } 0 < d < c, \text{ et } g(y) = g(x) + \frac{1}{c}(y-x)(f'(c) - f'(d))$$

Comme f' est croissante sur $]0, +\infty[$: $0 < d < c \Rightarrow f'(d) \leqslant f'(c)$.

Il en résulte : $\dfrac{1}{c}(y-x)(f'(c) - f'(d)) \geq 0$ (produit de trois nombres positifs).

et $g(y) = g(x) + \dfrac{1}{c}(y-x)(f'(c) - f'(d)) \geq g(x)$.

Ainsi la relation $0 < x < y$ implique, lorsque f' est croissante sur $]0, +\infty[$, la relation

$g(x) \leqslant g(y)$.

C'est dire que g est croissante sur $]0, +\infty[$.