



Géométrie dans l'espace

Exercice 1

Dans l'espace muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points :
 $A(3; 1; -2)$, $B(2; 3; 2)$ et $C(4; -2; 0)$.

1- Calculer les coordonnées des vecteurs \vec{AB} , \vec{AC} et $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$.

Les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} colinéaires ?

Que peut-on en déduire pour les points A , B et C ?

2- Soit $D(3; 0; 4)$. Ce point appartient-il au plan défini par A , B et C ?

Exercice 2

Soit m un nombre réel.

Dans l'espace muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points :
 $A(3; 1; -3)$, $B(-1; 5; -3)$ et $C(-1; 1; m)$.

1- Exprimer, en fonction de m , les coordonnées des vecteurs \vec{BC} et \vec{AC} , puis les longueurs BC et AC . Que peut-on en déduire sur la nature du triangle ABC ?

2- Existe-t-il des valeurs de m pour lesquelles le triangle ABC est équilatéral ?

Exercice 3

Dans l'espace muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le point $\Omega(1; 2; 0)$ et on appelle S la sphère de centre Ω et de rayon 3.

1- Donner une équation de la sphère S .

2- Soit $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$. On appelle D la droite de vecteur directeur \vec{u} passant par Ω .

Montrer que pour tout point $M(x; y; z)$ de la droite D il existe un réel m tel que :

$$\begin{cases} x = 1 + m \\ y = 2 - m \\ z = 2m \end{cases}$$

3- La droite D coupe la sphère S en deux points A et B avec $x_A > x_B$.

Déterminer les coordonnées de A et B .

4- Calculer AB en utilisant les coordonnées de A et B .

Comment pouvait-on prévoir ce résultat sans calcul ?

Géométrie dans l'espace

Exercice 4

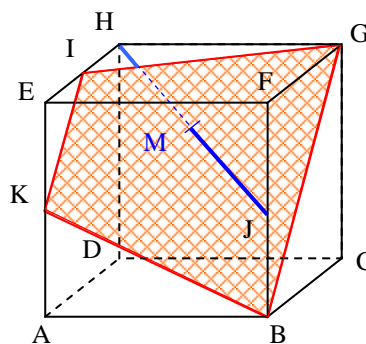
$ABCDEFGH$ est un cube et I et J sont les milieux des segments $[HE]$ et $[FB]$

1. Déterminer les coordonnées des points B ,

G, I, H, J et M milieu de $[HJ]$ dans le repère

$$(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$$

2. Démontrer que la droite (HJ) coupe le plan (BGI) en M



Exercice 5

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points

$$A(1; 0; -1), B(-1; 0; 0), C(1; -6; 4), D(4; -9; 5) \text{ et } E(3; -6; 3)$$

1. Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires

2. Montrer que le point D appartient à la droite (AE)

3. Montrer que $ABCE$ est un parallélogramme.

Est-ce un rectangle ? Est-ce un carré ?

Géométrie dans l'espace : corrigé

Exercice 1

1. On a $\vec{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{AB} \wedge \vec{AC} \begin{pmatrix} 16 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ce produit vectoriel est non nul

donc les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} ne sont donc pas colinéaires. Les points A, B et C ne sont pas alignés, ils définissent un plan.

2- D appartient au plan défini par A, B et C s'il existe deux réels x et y tels que $\vec{AD} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$.

Comme $\vec{AD} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$, cela revient à trouver deux réels x et y tels que
$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ 2x - 3y = -1 \\ 4x + 2y = 6 \end{cases}.$$

On a :
$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ 2x - 3y = -1 \\ 4x + 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ -y = -1 \\ 6x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Ainsi $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$, les points A, B, C et D sont donc coplanaires.

Exercice 2

1- On a $\vec{BC} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ m+3 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ m+3 \end{pmatrix}$. On en déduit que $BC = AC = \sqrt{16 + (m+3)^2}$.

Le triangle ABC est donc isocèle de sommet principal C .

2- On a $\vec{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $AB = \sqrt{32}$.

Le triangle ABC est équilatéral $\Leftrightarrow AB = BC = AC \Leftrightarrow \sqrt{16 + (m+3)^2} = \sqrt{32}$

$\Leftrightarrow 16 + (m+3)^2 = 32 \Leftrightarrow m^2 + 6m - 7 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ ou $m = 7$

Par suite, ABC est donc équilatéral pour $m = 1$ et pour $m = 7$.

Géométrie dans l'espace : corrigé

Exercice 3

1- $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9$ est une équation de la sphère S de centre Ω et de rayon 3.

2- Si M est sur D , les vecteurs $\overrightarrow{\Omega M}$ et \vec{u} sont colinéaires, il existe donc un réel m tel que

$$\overrightarrow{\Omega M} = m\vec{u}. \text{ Cela donne, avec les coordonnées } \begin{cases} x-1=m \\ y-2=-m \\ z=2m \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} x=1+m \\ y=2-m \\ z=2m \end{cases}.$$

3- Un point d'intersection de D et S doit vérifier en même temps $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9$

$$\text{et } \begin{cases} x=1+m \\ y=2-m \\ z=2m \end{cases}.$$

On en déduit que $m^2 + m^2 + (2m)^2 = 9 \Leftrightarrow 6m^2 = 9 \Leftrightarrow m = \sqrt{\frac{3}{2}}$ ou $m = -\sqrt{\frac{3}{2}}$

On obtient donc $S \cap D = \left\{ A\left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}}; 2 + \sqrt{\frac{3}{2}}; 2\sqrt{\frac{3}{2}}\right), B\left(1 - \sqrt{\frac{3}{2}}; 2 - \sqrt{\frac{3}{2}}; -2\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \right\}$

$$4- \text{ On a } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2\sqrt{\frac{3}{2}} \\ 2\sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \quad \text{On en déduit que : } AB = \sqrt{\frac{4 \times 3}{2} + \frac{4 \times 3}{2} + \frac{16 \times 3}{2}} = \sqrt{36} = 6.$$

Comme D passe par le centre de la sphère, $[AB]$ est un diamètre, sa longueur est donc

$$AB = 2 \cdot 3 = 6$$

Exercice 4

$$1. \text{ On a } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Cherchons s'il existe deux réels x et y tels $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$

$$\text{Il faut donc résoudre le système } \begin{cases} 3 = -2x \\ -9 = -6y \\ 6 = x + 5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = \frac{3}{2} \\ 6 = -\frac{3}{2} + 5 \times \frac{3}{2} \end{cases}$$

Or la troisième ligne est toujours vraie donc $\overrightarrow{AD} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Ce qui montre que les trois vecteurs sont coplanaires et par conséquent que les quatre points A, B, C et D sont coplanaires

Géométrie dans l'espace : corrigé

$$2. \text{ On a } \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées des deux vecteurs sont proportionnelles : $3 = 2 \times \frac{3}{2}$; $-9 = -6 \times \frac{3}{2}$ et $6 = 4 \times \frac{3}{2}$

Donc $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2} \overrightarrow{AE}$ par conséquent, les vecteurs sont coplanaires et les points A , D et E sont alignés

$$2. \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{EC} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs sont donc égaux, ce qui prouve que le quadrilatère $ABCE$ est un parallélogramme

Pour montrer que c'est un rectangle on peut :

➤ Soit montrer que les diagonales ont la même longueur :

$$AC^2 = 0^2 + (-6)^2 + 5^2 = 61 \quad \text{et} \quad BE^2 = 4^2 + (-6)^2 + 3^2 = 61$$

donc les diagonales $[AC]$ et $[BE]$ ont la même longueur

et par conséquent, le parallélogramme $ABCE$ est un rectangle

➤ Soit montrer que le triangle ABC est rectangle en B

$$\begin{cases} AB^2 = (-2)^2 + 0^2 + 1^2 = 5 \\ BC^2 = (-2)^2 + (-6)^2 + 4^2 = 56 \end{cases} \quad \text{donc } AB^2 + BC^2 = 61$$

$$\text{or } AC^2 = 0^2 + (-6)^2 + 5^2 = \dots = 61 \quad \text{On a donc } AB^2 + BC^2 = AC^2$$

donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B

et par conséquent, le parallélogramme $ABCE$ a un angle droit, c'est un rectangle

$$\text{On a } \begin{cases} AB^2 = (-2)^2 + 0^2 + 1^2 = 5 \\ BC^2 = (-2)^2 + (-6)^2 + 4^2 = 56 \end{cases} \quad \text{donc } AB \neq BC$$

Le rectangle n'a pas ses cotés de même longueur, ce n'est pas un carré.

Géométrie dans l'espace : corrigé

Exercice 5

1. On a $B(1; 0; 0)$ $G(1; 1; 1)$ $I(0; \frac{1}{2}; 1)$ $H(0; 1; 1)$ $J(1; 0; \frac{1}{2})$

M est le milieu de $[HJ]$ donc $M\left(\frac{0+1}{2}; \frac{1+0}{2}; \frac{1+\frac{1}{2}}{2}\right)$ $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$

2. Démontrer que la droite (HJ) coupe le plan (BGI) en M revient à prouver que M appartient au plan (BGI)

$$\text{On a } \overline{BI} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overline{BG} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overline{BM} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Cherchons s'il existe deux réel x et y tels $\overline{BM} = x\overline{BI} + y\overline{BG}$

$$\text{Il faut donc résoudre le système } \begin{cases} -\frac{1}{2} = -x \\ \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x + y \\ \frac{3}{4} = x + y \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} = -x \\ \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x + y \\ \frac{3}{4} = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + y \\ \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

On a donc $\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BI} + \frac{1}{4}\overline{BG}$

Ce qui montre que les trois vecteurs sont coplanaires

et par conséquent que les quatre points B, I, G et M

sont coplanaires

