

Série : Primitives

Exemples

Déterminez une primitive de f sur I dans chacun des cas suivants :

	Brouillon (méthodes ; astuces)
<p>a) $f(x) = 12x^5 - 4x^3 + 1$; $I = \mathbb{R}$</p> <p>f est continue sur \mathbb{R}. Elle admet donc des primitives. Une primitive de f sur \mathbb{R} est la fonction F telle que</p> $F(x) = 12 \frac{x^6}{6} - 4 \frac{x^4}{4} + x = 2x^6 - x^4 + x$	<p>pas difficulté majeure :</p> $f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$ $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$
<p>b) $f(x) = 3 - \frac{4}{x^2}$; $I =]0 ; +\infty[$</p> <p>f est continue sur $]0 ; +\infty[$. Elle admet donc des primitives. Une primitive de f sur \mathbb{R} est la fonction F telle que</p> $F(x) = 3x - 4 \frac{-1}{(2-1)x^{2-1}} = 3x + \frac{4}{x}$	$f(x) = \frac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N}^* \text{ et } n \neq 1)$ $F(x) = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$
<p>c) $f(x) = \frac{3x}{(x^2+1)^3}$; $I = \mathbb{R}$</p> <p>f est continue sur \mathbb{R} (fonction rationnelle définie sur \mathbb{R}). Elle admet donc des primitives. Une primitive de f sur \mathbb{R} est la fonction F telle que</p> $F(x) = \frac{3}{2} \left[\frac{-1}{2(x^2+1)^2} \right] = \frac{-3}{4(x^2+1)^2}$ <p>(pour s'en convaincre, dériver $F(x)$)</p>	<p>$f(x)$ est sous la forme $\frac{U'}{u^n}$ avec :</p> <p>$u = x^2 + 1$ et $n = 3$ Mais, $\frac{U'}{u^n} = \frac{2x}{(x^2+1)^3}$: il faut ajuster les coefficients dans l'écriture de $f(x)$.</p> $f(x) = \frac{3}{2} \left[\frac{2x}{(x^2+1)^3} \right]$ $F(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$
<p>d) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$; $I =]1 ; +\infty[$</p> <p>f est continue sur $]1 ; +\infty[$ comme quotient de deux fonctions continues. Elle admet donc des primitives. Une primitive de f sur \mathbb{R} est la fonction F telle que</p> $F(x) = 2\sqrt{x^2-1}$	<p>$f(x)$ est sous la forme $\frac{U'}{\sqrt{u}}$ avec :</p> <p>$u = x^2 - 1$ Et, $\frac{u'}{\sqrt{u}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$:</p> $F(x) = 2\sqrt{u}$
<p>e) $f(x) = \frac{6x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}$; $I = \mathbb{R}$ $\frac{6x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}$</p>	<p>idem au précédent, mais il faut penser à ajuster les coefficients dans l'écriture de $f(x)$:</p> $f(x) = 3 \left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} \right)$
<p>f) $f(x) = -\sin x + 2 \cos x$; $I = \mathbb{R}$</p> <p>f est continue sur \mathbb{R}. Elle admet donc des primitives. Une primitive de f sur \mathbb{R} est la fonction F telle que</p> $F(x) = \cos x + 2 \sin x$	<p>pas difficulté majeure :</p> <p>$f(x) = \sin x$: $F(x) = -\cos x$ $g(x) = \cos x$: $G(x) = \sin x$</p>

Série : Primitives

		Brouillon (méthodes ; astuces)
g) $f(x) = \sqrt{2x+3}$; $I =]-\frac{3}{2}; +\infty[$		$f(x)$ est sous la forme $u' \times u^r$ avec : $u = 2x + 3$ et $r = 0,5$ Mais, $u' \times u^r = 2\sqrt{2x+3}$: il faut ajuster les coefficients dans l'écriture de $f(x)$.
f est continue sur $]-\frac{3}{2}; +\infty[$. Elle admet donc des primitives. Une primitive de f sur \mathbb{R} est la fonction F telle que		$f(x) = \frac{1}{2} (2\sqrt{2x+3})$
$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+3)^{0,5+1}}{0,5+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (2x+3)\sqrt{2x+3}$ $= \frac{1}{3} (2x+3)\sqrt{2x+3}$		$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{r+1}}{r+1}$
h) $f(x) = (2x+3)\sqrt{2x+3}$; $I =]-\frac{3}{2}; +\infty[$		On a $f(x) = (2x+3)^{1,5}$ qui est sous la forme $u' \times u^r$ avec : $u = 2x + 3$ et $r = 0,5$ Mais, $u' \times u^r = 2(2x+3)^{1,5}$: il faut ajuster les coefficients dans l'écriture de $f(x)$.
f est continue sur $]-\frac{3}{2}; +\infty[$. Elle admet donc des primitives. Une primitive de f sur \mathbb{R} est la fonction F telle que		$f(x) = \frac{1}{2} [(2x+3)\sqrt{2x+3}]$
$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+3)^{1,5+1}}{1,5+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot (2x+3)^2\sqrt{2x+3}$ $= \frac{1}{5} (2x+3)^2\sqrt{2x+3}$ <i>(pour s'en convaincre, dériver $F(x)$)</i>	pour $n \in \mathbb{N}$ et $a > 0$: $a^{n+0,5} = a^n\sqrt{a}$ avec les racines carrées, il est souvent utile d'utiliser les puissances rationnelles	$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{r+1}}{r+1}$
i) $f(x) = 2\sin x(\cos^8 x - 2\cos^6 x + \cos^4 x)$		pas difficulté majeure :
f est continue sur \mathbb{R} . Elle admet donc des primitives. Une primitive de f sur \mathbb{R} est la fonction F telle que		$f(x) = u' \times u^n$ ($n \in \mathbb{N}$) $u = \cos x$ et $n \in \{4; 6; 8\}$
$F(x) = 2\left(-\frac{\cos^9 x}{9}\right) - 4\left(-\frac{\cos^7 x}{7}\right) + 2\left(-\frac{\cos^5 x}{5}\right)$ $F(x) = -\frac{2}{9}\cos^9 x + \frac{4}{7}\cos^7 x - \frac{2}{5}\cos^5 x$ <i>(pour s'en convaincre, dériver $F(x)$)</i>		$F(x) = \frac{u^{n+1}}{n+1} = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}$
j) $f(x) = \cos^4 x$		pas difficulté majeure :
► On linéarise $f(x)$ (voir chap sur les nombres complexes, page 15) on a : $\cos^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$		$f(x) = u' \cos u$
► f est continue sur \mathbb{R} . Elle admet donc des primitives. Une primitive de f sur \mathbb{R} est la fonction F telle que		$F(x) = \sin u$
$F(x) = \frac{1}{8} \cdot \frac{\sin 4x}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2x}{2} + \frac{3}{8}x = \frac{\sin 4x}{32} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{3}{8}x$		
k) $f(x) = \cos^2 x \sin^4 x$		
► On linéarise $f(x)$ (voir chap sur les nombres complexes, page 15) on a : $\cos^2 x \cos^4 x = \frac{1}{32}\cos 6x - \frac{1}{16}\cos 4x - \frac{1}{32}\cos 2x + \frac{1}{16}$		
► f est continue sur \mathbb{R} . Elle admet donc des primitives. Une primitive de f sur \mathbb{R} est la fonction F telle que		(procéder comme dans l'exemple précédent)
$F(x) = \dots$		