Probabilités sur un ensemble fini

I- Rappel de 3e Année

I-1. Types de tirages :

Soit un ensemble fini E contenant n éléments. On considère l'épreuve suivante : " tirer p éléments de E ".

Type de tirages	Ordre	Répitition d'éléments	Dénombrement
Successifs avec remise	On tient compte de l'ordre	Un élément peut être tiré plusieurs fois	n^p
Successifs sans remise	On tient compte de l'ordre	Un élément n'est tiré qu'une seule fois	$A_n^p = n(n-1)...(n-p+1)$
simultanés	L'ordre n'intervient pas	Un élément n'est tiré qu'une seule fois	$C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$

I-2. Vocabulaire :

Soit Ω l'univers d'une exprérience aléatoire .

On écrit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ où chaque ω_i est une des n issues de cette expérience aléatoire .

- Un événement est un sous-ensemble de Ω .
- Une probabilité P définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ est une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans [0 , 1] vérifiant les deux axiomes suivants :

- $P(\Omega) = 1$;
- Pour tous événements A et B incompatibles $(A \cap B = \emptyset)$, on a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Remarques :

1. On note $\overline{A}$ l'événement contraire de A et on a:
   $A \cap \overline{A} = \emptyset$ et $A \cup \overline{A} = \Omega$.
   On dit que $(A , \overline{A})$ est un système complet .
2. On dit que (E_1 , E_2 , E_3) est un système si et seulement si :
   $E_1 \cap E_2 = E_2 \cap E_3 = E_3 \cap E_1 = \varnothing$ et $E_1 \cup E_2 \cup E_3 = \Omega$.

Propriétés :

Soit A et B deux événements .

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ et $P(\emptyset) = 0$.
2. $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$.
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
4. Si (E_1 , E_2 , E_3) est un système complet alors pour tout événement B
   $P(B) = P(B \cap E_1) + P(B \cap E_2) + P(B \cap E_3)$.
5. Lorsque $P\{\omega_i\} = \dfrac{1}{n}$, on dit que P est la probabilité uniforme ou l'équiprobabilité

et dans ce cas là : $P(A) = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \dfrac{Card(A)}{n}$.

Probabilités sur un ensemble fini

Exercice 1:

Un sac contient 13 jetons indiscernables au toucher : 3 jetons noirs marqués A , B et C et 10 jetons blancs numérotés de 1 à 10 . On considère les événements suivants :
R :" obtenir les 3 jetons noirs parmi les 5 jetons extraits "
S : " obtenir le jetons marqué C parmi les 5 jetons extraits "
T : " obtenir au moins un jeton noir parmi les 5 jetons extraits "
Calculer la probabilité de chacun des événements R , S et T .

Solution :
Un tirage correspond au choix de 5 jetons parmi les 13 jetons se trouvant dans le sac .
Donc : $\text{Card}(\Omega) = C_{13}^{5} = 1287$.

$P(R) = \dfrac{C_3^3 C_{10}^2}{1287} = \dfrac{45}{1287}$; $P(S) = \dfrac{C_{12}^4}{1287} = \dfrac{495}{1287}$.

$P(S) = 1 - P\left(\overline{S}\right) = 1 - \dfrac{C_{10}^5}{1287} = \dfrac{1035}{1287}$.

Exercice 2 :

Une urne contient 12 boules indiscernables au toucher : m boules blanches et n boules noires (m et n sont des entiers naturels non nuls) .
1° On tire successivement et sans remise 2 boules de l'urne .
Déterminer les couples (m , n) pour que la probabilité p d'obtenir 2 boules de couleurs différentes soit égales à $\dfrac{16}{33}$.
2° On prend désormais : m = 8 et n = 4 .
On tire successivement et avec remise 3 boules de l'urne .
a) Calculer la probabilité p' d'obtenir exactement une boule blanche .
b) Calculer la probabilité p'' d'obtenir au moins une boule blanche et au moins une boule noire .

Solution :
1° Le nombre de tirage possible est $A_{12}^2 = 12.11 = 132$.
Soit p la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes est :

$$p = \frac{m}{12}.\frac{n}{11} + \frac{n}{12}.\frac{m}{11} = \frac{mn}{66} .$$

Donc tous les couples (m , n) vérifient : $\begin{cases} m+n=12 \\ \dfrac{mn}{66} = \dfrac{16}{33} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+n=12 \\ mn = 32 \end{cases}$

D'où m et n sont les solutions de l'équation : $x^2 - 12x + 32 = 0$.
On obtient que : (m , n) = (4 , 8) ou (m , n) = (8 , 4) .
2° a) La probabilité d'obtenir exactement une boule blanche lorsqu'on effectue trois tirages successivement avec remise est :

$$p' = 3\frac{m.n^2}{12^3} = 3\frac{8.4^2}{12} = \frac{2}{9} .$$

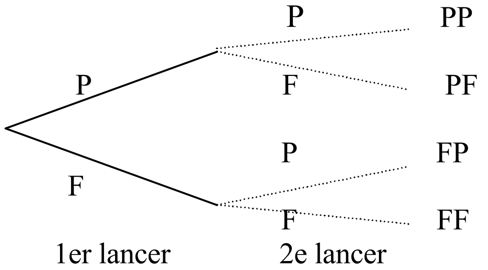
b) l'événement " obtenir au moins une boule blanche et au moins une noire " est la réunion des événements incompatibles " obtenir exactement une boule blanche " et " obtenir exactement deux boules blanches ".

La probabilité cherchée est donc : $p'' = p' + 3\dfrac{8^2.4}{12^3} = \dfrac{2}{9} + \dfrac{4}{9} = \dfrac{2}{3}$.

II- Evénements indépendants.

III- 1. Exemple :

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie non truquée.



La probabilité d'obtenir deux fois pile est donc égale à $\frac{1}{4}$.

Si on note les événements suivants :
A : " le résultat du premier lancer est pile "
B : " le résultat du second lancer est pile "
La probabilité d'obtenir deux fois pile est la probabilité de l'événement $A \cap B$.

$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, or $P(A) = \frac{1}{2}$ et $P(B) = \frac{1}{2}$.

On remarque donc sur exemple que : $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

II-2. Définition :

On dit que les événements A et B sont indépendants si et seulement si
$P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

Activité :

A et B sont deux événements indépendants .
1° Montrer que A et $\overline{B}$ ainsi que $\overline{A}$ et B sont indépendants .
2° $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont-ils indépendants ?

Exercice :

Un jeton est marqué du chiffre 1 sur une face et du chiffre 2 sur l'autre face .
Un dé cubique est marqué du chiffre 1 sur trois faces , du chiffre 2 sur deux faces et du chiffre 3 sur une face .
On lance simultanément le jeton et le dé et on lit les chiffres qui apparaissent sur chaque face supérieure (a pour le jeton et b pour le dé) .
1° Calculer la probabilité de chacun des six événements élémentaires .
2° Trouver la probabilité des événements A : " a = b" et B : " a < b " .

Solution :

1° Pour le jeton : $P(1) = P(2) = \frac{1}{2}$.

Pour le dé : $P(1) = \frac{1}{2}$, $P(2) = \frac{1}{3}$ et $P(3) = \frac{1}{6}$.

Les résultats du dé et du jeton sont supposés indépendants .

$P(\,(1,1)\,) = P(\,(2,1)\,) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(\,(1,2)\,) = P(\,(2,2)\,) = \frac{1}{6}$ $\qquad$ $P(\,(1,3)\,) = P(\,(2,3)\,) = \frac{1}{12}$.

2° $P(A) = P(\,(1,1)\,) + P(\,(2,2)\,) = \frac{5}{12}$ et $P(B) = \frac{1}{3}$.

III- Probabilité conditionnelle.

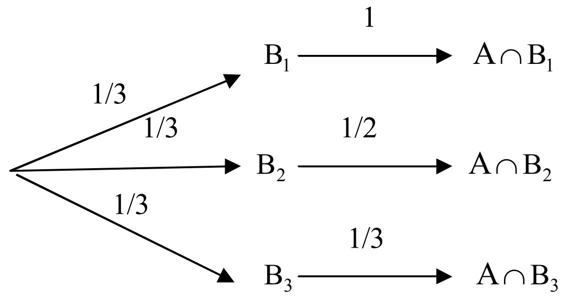
Activité :

On dispose de trois boîtes B_1 , B_2 et B_3 d'apparences identiques . Elles contiennet respectivement un, deux et trois papiers ; dans chaque boîte un seul papier est marqué. Une partie consiste, pour un joueur, à désigner au hasard une boîte et à tirer également au hasard un papier de cette boîte.

Si le papier est marqué le joueur reçoit un cadeau.

1. Quelle est la probabilité de tirer le papier marqué sachant qu'il provienne de B_1 ? Sachant qu'il provienne de B_2 ? Sachant qu'il provienne de B_3 ?
2. Déterminer la probabilité que le joueur reçoit un cadeau.

1° Désignons par A : " le papier tiré est marqué " , par B_i : " la boîte désignée est B_i " et par E_i : " tirer le papier marqué sachant qu'il provient de B_i " avec $i \in \{1,2,3\}$.



Il en résulte que : $P(E_1) = 1$, $P(E_2) = \frac{1}{2}$ et $P(E_3) = \frac{1}{3}$.

2° On a : $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3)$

et : $P(A \cap B) = 1 . \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, $\quad P(A \cap B_2) = \frac{1}{3} . \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, $\quad P(A \cap B_3) = \frac{1}{3} . \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

Donc $P(A) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{11}{18}$.

Définition :

On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A, où A est un événement de probabilité non nulle, la probabilité que l'événement B soit réalisé sachant que A est réalisé.

On note : $P(A \mid B\,) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Exercice 1:

On dispose d'un dé cubique et homogène dont les face sont numérotées : -1 , -1 , - 1 ,

Probabilités sur un ensemble fini

0, 1 et 1. On jette ce dé deux fois de suite et on note à chaque fois le numéro de la face supérieure.

1° Déterminer la probabilité de chacun des événements A et B suivants :
A :"les deux numéros sont différents"
B :" la somme des deux numéros obtenus est égale à 0".

2° Soit C l'événement défini par "les deux numéros obtenus sont différents sachant que leur somme est nulle". Calculer P(C).

Corrigé:

Il suffit de dresser un tableau.

1° $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \frac{11}{18}$; $P(B) = \frac{13}{36}$. 2° $P(C) = P\left(A|B\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{12}{13}$.

Exercice 2:

1. On dispose d'une urne U_1 contenant 3 boules rouges et 7 boules noires. On extrait simultanément dexu boules de cette urne ; on considère que tous les tirages sont équiprobables.

a) Quelle est la probabilité p_1 que les deux boules tirées soient rouges ?
b) Quelle est la probabilité p_2 que les deux boules tirées soient noires ?
c) Quelle est la probabilité p_3 que les deux boules tirées soient de même couleur ?
d) Quelle est la probabilité p_4 que les deux boules tirées soient de couleur différentes ?

2. On dispose aussi d'une deuxième urne U_2 contenant 4 boules rouges et 6 boules noires. On tire maintenant deux boules simultanément de l'urne U_1 et une boule de l'urne U_2 ; on suppose que tous les tirages sont équiprobables. On considère les événements suivants :
R : " les trois boules tirées sont rouges "
D : " les trois boules tirées ne sont pas de la même couleur "
B : " la boule tirée dans U_2 est rouge ".

a) Calculer P(R).
b) Quelle est la probabilité de tirer trois boules de même couleur ?
c) Calculer la probabilité conditionnelle $P\left(B|D\right)$.

Solution :

1° a) $p_1 = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$; b) $p_2 = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$; c) $p_3 = p_1 + p_2 = \frac{8}{15}$; d) $p_4 = 1 - p_3 = \frac{7}{15}$.

2° a) $P(R) = \frac{1}{15}.\frac{2}{5} = \frac{2}{75}$; b) $P(N) = \frac{7}{15}.\frac{3}{5} = \frac{7}{25}$ et $P\left(\overline{D}\right) = P(R) + P(N) = \frac{23}{75}$.

c) $P(D) = 1 - P\left(\overline{D}\right) = \frac{52}{75}$, $P\left(B \cap D\right) = \frac{2}{5}\left(p_2 + p_4\right) = \frac{28}{75}$ donc $P\left(B|D\right) = \frac{7}{13}$.

Exercice 3 :

On dispose de deux urnes A et B.
A contient 5 boules blanches et 3 boules noires
B contient 2 boules blanches et 6 boules noires.
On choisit l'une des deux urnes et on extrait une boule au hasard. On considère les événements suivants :
A : " l'urne choisie est A " et N : " la boule tirée est noire ".

Probabilités sur un ensemble fini

1° Calculer P(A) , $P(\overline{A})$, $P(N|A)$ et $P(N|\overline{A})$.

2° Calculer $P(N \cap A)$.

3° En écrivant $N = (N \cap A) \cup (N \cap \overline{A})$, calculer P(N) puis $P(\overline{N})$.

4° On a constaté que la boule tirée est noire.

a) Quelle est la probabilité pour qu'elle soit tirée de A ?

b) Quelle est la probabilité pour qu'elle soit tirée de B ?

Solution :

1° $P(A) = P(\overline{A}) = \frac{1}{2}$; $P(N|A) = \frac{3}{8}$ et $P(N|\overline{A}) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

2° $P(N \cap A) = P(A).P(N|A) = \frac{3}{16}$.

3° $P(N) = P(N \cap A) + P(N \cap \overline{A}) = P(A).P(N|A) + P(\overline{A}).P(N|\overline{A}) = \frac{3}{16} + \frac{6}{16} = \frac{9}{16}$

$P(\overline{N}) = 1 - P(N) = \frac{7}{16}$.

4° a) $P(A|N) = \frac{P(A \cap N)}{P(N)} = \frac{1}{3}$; b) $P(\overline{A}|N) = 1 - P(A|N) = \frac{2}{3}$.

Conséquences :

Soit un événement de probabilité non nulle.

1. Principe de probabilité composée : $P(A \cap B) = P(A).P(B|A)$

2. Principe de probabilité totale :

$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) = P(A).P(B|A) + P(\overline{A}).P(B|\overline{A})$

Si (E_1 , E_2 , E_3) est un système complet alors

$P(B) = P(B \cap E_1) + P(B \cap E_2) + P(B \cap E_3) = P(B).P(B|E_1) + P(B).P(B|E_2) + P(B).P(B|E_3)$

Exercice 4:

Une urne A contient 2 boules rouges et 3 boules noires, une urne B contient 3 boules rouges et 2 boules noires .

On tire au hasard une boule de l'urne A :

- si elle noire, on la place dans l'urne B
- sinon, on l'écarte du jeu .

On tire au hasard ensuite une boule de l'urne B.

On considère les événements suivants :

R_1 :" la boule tirée de A est rouge " ; N_1 :" la boule tirée de A est noire "

R_2 :" la boule tirée de b est rouge " ; N_2 :" la boule tirée de B est noire " .

1° a) Calculer P(R_1) et P(N_1) .

b) Calculer les probabilités des événements $R_2|R_1$ et $R_2|N_1$.

En déduire que : $P(R_2) = \frac{27}{50}$.

c) Calculer P(N_2) .

2° On répète n fois l'épreuve précédente en supposant que les différentes épreuves sont indépendantes.

Quel est le nombre minimum d'épreuves doit-on effectuer pour que la probabilité p_n d'obtenir au moins une fois une boule rouge de l'urne B soit supérieure à 0,99 ?

Probabilités sur un ensemble fini

Solution:

1° a) $P(R_1)=\frac{2}{5}$; $P(N_1)=\frac{3}{5}$. b) $P(R_2|R_1)=\frac{3}{5}$; $P(R_2|N_1)=\frac{1}{2}$.

$P(R_2)=P(R_2\cap N_1)+P(R_2\cap R_1)=P(N_1).P(R_2|N_1)+P(R_1).P(R_2|R_1)=\frac{27}{50}$.

c) $P(N_2)=1-P(R_2)=\frac{23}{50}$.

2° $p_n=1-\left(\frac{23}{50}\right)^n$; $p_n\geq 0{,}99 \Leftrightarrow \left(\frac{23}{50}\right)^n \leq 0{,}01 \Leftrightarrow n\geq \frac{\mathrm{Log}(0{,}01)}{\mathrm{Log}\frac{23}{50}}$, d'où $n=6$.

Exercice 5:

On considère trois urnes U_1 , U_2 et U_3 telles que :

U_1 contient 2 boules rouges et 6 boules blanches

U_2 contient 3 boules rouges , 4 boules noires et 2 boules blanches .

U_3 contient une boule rouge et 4 boules blanches .

On lance une fois un dé cubique régulier dont les faces sont numérotées de 1 à 6 .

- Si le résultat est 1, on tire une boule de U_1 .
- Si le résultat est 2, 3 ou 5, on tire une boule de U_2 .
- Si le résultat est 4 ou 6, on tire une boule de U_3 .

1° a) Calculer $P(U_1)$, $P(U_2)$ et $P(U_3)$ les probabilités de choisir respectivement les urnes U_1, U_2 et U_3 .

b) Calculer la probabilité des événements suivants :

A_i : " la boule tirée est rouge et provient de U_i " , où $i\in\{1,2,3\}$.

2° a) Calculer la probabilité de l'événement B : " la boule tirée est rouge " .

b) Sachant que la boule tirée est rouge, calculer la probabilité pour qu'elle provienne de U_i , où $i\in\{1,2,3\}$.

Solution :

1° a) $P(U_1)=\frac{1}{6}$, $P(U_2)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ et $P(U_3)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

b) $P(A_1)=\frac{1}{6}.\frac{2}{8}=\frac{1}{24}$, $P(A_2)=\frac{1}{2}.\frac{3}{9}=\frac{1}{6}$ et $P(A_3)=\frac{1}{3}.\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$.

2° a) $P(B)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{11}{40}$.

b) $P(U_1|B)=\frac{P(A_1)}{P(B)}=\frac{5}{33}$, $P(U_2|B)=\frac{P(A_2)}{P(B)}=\frac{20}{33}$ et $P(U_3|B)=\frac{P(A_3)}{P(B)}=\frac{8}{33}$.

Exercice 6 :

Une urne contient 3 pièces équilibrées. Deux de ces pièces sont normales : elles possèdent une face « FACE » et une face « PILE ». La troisième est truquée : elle possède deux faces « FACE ».

On extrait une pièce de l’urne au hasard, puis on effectue des lancers successifs et indépendants de cette pièce.

On considère les événements suivants :

A : « la pièce extraite est normale » , $\overline{A}$: « la pièce extraite est truquée »

Probabilités sur un ensemble fini

P : « on obtient PILE au premier lancer » ,
F_n : « on obtient FACE aux n premiers lancers ».

1. a) Calculer $P(P \cap A)$ et $P(P \cap \overline{A})$.
   b) En déduire P(P).
2. Montrer que $P(F_n) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right)$.
3. a) Sachant qu'on a obtenu FACE n fois au cours des n premiers lancers, quelle est la probabilité d'avoir extrait la pièce truqué ?
   b) Quelle est la limite de cette probabilité quand n tend vers $+\infty$?

Solution :

1.a) $P(P \cap A) = \frac{2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ et $P(P \cap \overline{A}) = \frac{1}{3}.0 = 0$.

b) P(P) = $P(P \cap A) + P(P \cap \overline{A}) = \frac{1}{3}$

2. $P(F_n) = P(F_n \cap A) + P(F_n \cap \overline{A}) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right)$.

3. a) $P(\overline{A}|F_n) = \frac{P(F_n \cap \overline{A})}{P(F_n)} = \frac{1}{\frac{1}{2^{n-1}} + 1}$; b) $\lim\limits_{n \to +\infty} P(\overline{A}|F_n) = 1$