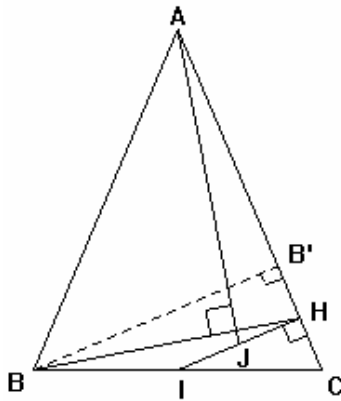


Produit dans le plan

Exercice 1



ABC est un triangle isocèle de sommet principal A

et I le milieu du segment [BC].

H est le projeté orthogonal de I sur [AC] et J le milieu de [IH].

On cherche à établir que : (AJ) et (BH) sont orthogonales.

- Justifier les égalités : $\vec{BH} \cdot \vec{AI} = \vec{CH} \cdot \vec{AI} = \vec{CH} \cdot \vec{AH}$
- Soit B' le projeté orthogonal de B sur (AC), montrer que : $\vec{BH} \cdot \vec{AH} = \vec{HC} \cdot \vec{AH}$
- Prouver que $\vec{AJ} = \frac{1}{2}(\vec{AI} + \vec{AH})$ et utiliser les questions précédentes pour répondre au problème.

Exercice 2

- Montrer que $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$ est l'équation d'un cercle C dont on précisera le centre Ω et le rayon
- Vérifier que A(0,3) est sur le cercle C
 - Déterminer une équation cartésienne de la droite D tangente à C au point A
- Soit B le point de coordonnées (14;-3). On se propose de déterminer les équations des droites D_1 et D_2 tangentes à C respectivement en A_1 et A_2
 - Montrer que A_1 et A_2 sont sur le cercle C' de diamètre [B Ω]
 - Déterminer une équation du cercle C'
 - Déterminer les coordonnées de A_1 et A_2 puis les équations cherchées

Produit dans le plan

Exercice 3

Soit le triangle équilatéral ABC de côté 4 et k un réel tel que $0 < k < 1$.

On appelle M le point du segment [AB] tel que $\vec{BM} = k\vec{BA}$

On appelle N le point du segment [BC] tel que $\vec{BN} = k\vec{BC}$

1. Faire une figure en prenant $k = \frac{1}{4}$
2. Justifier que $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 8$
3. Exprimer les vecteurs \vec{AN} et \vec{CM} en fonction de \vec{BA} et \vec{BC} .
4. Montrer que $\vec{AN} \cdot \vec{CM} = 8k^2 - 32k + 8$
5. En déduire la ou les valeurs de k pour lesquelles les droites (AN) et (CM) sont perpendiculaires.

Exercice 4

On considère les points $A(0 ; -1)$, $B(4 ; 3)$, $C(2 ; -5)$

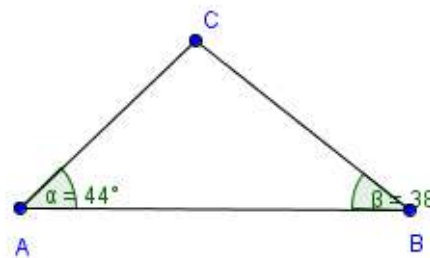
1. Déterminer les équations des médiatrices D et D' respectivement des segments [AC] et [AB]
2. En déduire les coordonnées de I centre du cercle C circonscrit au triangle ABC.
3. Déterminer une équation du cercle C .

Exercice 5

ABC est triangle tel que :

$$AB = 80,42 \text{ m}, \alpha = 44^\circ, \beta = 38^\circ$$

Calculer AC au cm près par excès.



Exercice 6

ABC est un triangle tel que $AB = 5$, $AC = 6$ et $BC = 7$.

A' , B' et C' sont les milieux respectifs des côtés [BC], [AC] et [AB].

Calculer la longueur la médiane AA' et une mesure de l'angle \widehat{BAC} .



Produit dans le plan

Exercice 1

$$1. \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AI} = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CH}) \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AI}$$

Car la médiane (AI) est aussi une hauteur donc $(BC) \perp (AI)$ ou encore $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AI} = 0$

H est le projeté orthogonal de I sur la droite (AC) donc (HI) est perpendiculaire à (AC) = (HC)

d'où $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{HI} = 0$. Il en résulte ainsi que :

$$\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CH} \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HI}) = \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{HI} = \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AH}$$

$$2. \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AH} = (\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'H}) \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{B'H} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'H} \cdot \overrightarrow{AH}$$

$\overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$ car B' étant projeté de B sur (AC), on a $(BB') \perp (AH)$

De plus, dans le triangle BB'C, la droite passe par le milieu du côté [BC] et est parallèle à la (BB'),

nous pouvons en déduire que H est le milieu du côté [B'C] donc $\overrightarrow{B'H} = \overrightarrow{HC}$

Par conséquent, $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'H} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AH}$

$$3. J \text{ est le milieu de [IH] donc } \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AH})$$

$$\text{Calculons le produit scalaire : } \overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BH} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AH}) \cdot \overrightarrow{BH} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BH})$$

En utilisant les questions précédentes on obtient :

$$\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BH} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AH}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HC}) \cdot \overrightarrow{AH} = \frac{1}{2} \vec{0} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$$

Nous pouvons en déduire que les droite (AJ) et (BH) sont perpendiculaires.

Produit dans le plan

Exercice 2

1. Il faut écrire l'équation cartésienne du cercle :

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 - 9 - 1 - 15 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 = 25$$

Le cercle C a pour centre le point $\Omega(3 ; -1)$ et pour rayon $\sqrt{25} = 5$

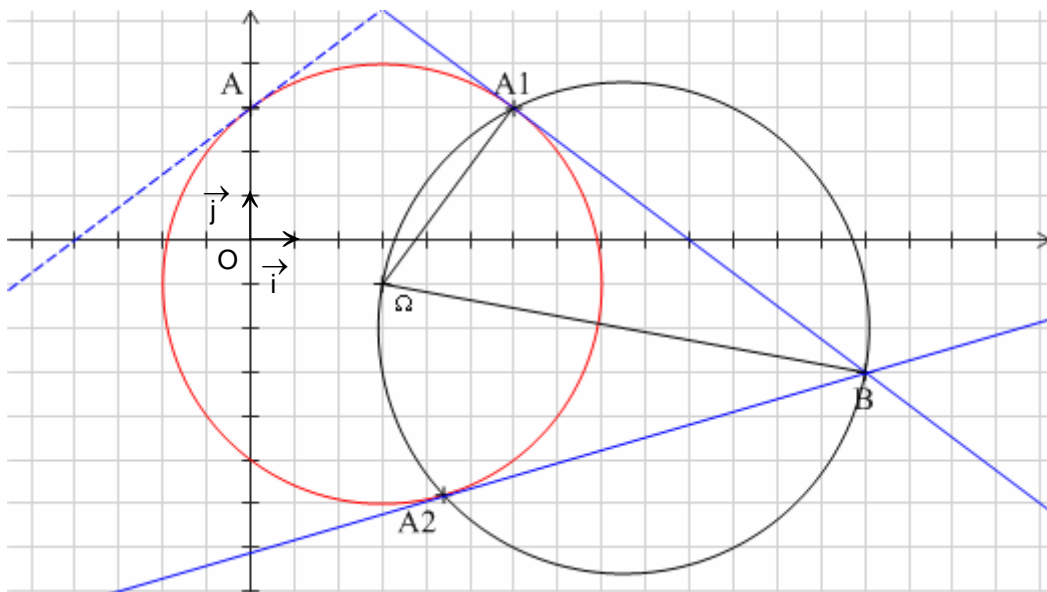
2. a) $0^2 + 3^2 - 6 \cdot 0 + 2 \cdot 3 - 15 = 0$ donc $A(0 ; 3)$ est sur le cercle

b) La tangente en A est perpendiculaire au rayon $[A\Omega]$ donc

$$\begin{aligned} \text{On a } \overrightarrow{A\Omega}(3; -4) \text{ et } \overrightarrow{AM}(x; y-3), \quad M(x; y) \in D &\Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x - 4(y-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x - 4y + 12 = 0 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de D est $3x - 4y + 12 = 0$

3. a) Une tangente est toujours perpendiculaire au rayon donc $BA_1\Omega$ et $BA_2\Omega$ sont des triangles rectangles en A_1 et A_2 or le cercle circonscrit à un triangle rectangle a pour diamètre son hypoténuse par conséquent A_1 et A_2 sont sur le cercle C' de diamètre $[B\Omega]$



Produit dans le plan

b) On a : $\overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x-14 \\ y+3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\Omega M} \begin{pmatrix} x-3 \\ y+1 \end{pmatrix}$

$$M(x;y) \in C' \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{\Omega M}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{\Omega M} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-14)(x-3) + (y+3)(y+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 17x + 4y + 45 = 0$$

c) Les coordonnées de A_1 et A_2 sont les solutions du système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0 \\ x^2 + y^2 - 17x + 4y + 45 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0 \\ 11x - 2y - 60 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0 \\ \frac{11x - 60}{2} = y \end{cases}$$

En remplaçant y dans la première équation par $\frac{11x-60}{2}$, on obtient :

$$x^2 + \left(\frac{11x-60}{2}\right)^2 - 6x + 2\left(\frac{11x-60}{2}\right) - 15 = 0 \Leftrightarrow \frac{125}{4}x^2 - 325x + 825 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 52x + 132 = 0$$

On calcule de discriminant et les deux racines : $\Delta = b^2 - ac = (-52)^2 - 4 \times 5 \times 132 = 64 = 8^2$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{52 - 8}{10} = 4,4 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{52 + 8}{10} = 6$$

Il reste à trouver les ordonnées en utilisant l'équation 2 :

$$y_1 = \frac{11x_1 - 60}{2} = -5,8 \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{11x_2 - 60}{2} = 3$$

Les deux cercles sont sécants en deux points : $A_1(4,4 ; -5,8)$ et $A_2(6 ; 3)$



Produit dans le plan

Il reste à déterminer les équations des tangentes.

$$\text{On a : } \vec{\Omega A_1} \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ -\frac{24}{5} \end{pmatrix} \text{ et } \vec{A_1 M} \begin{pmatrix} x - \frac{22}{5} \\ y + \frac{29}{5} \end{pmatrix}$$

$$M(x; y) \in D_1 \Leftrightarrow \vec{\Omega A_1} \cdot \vec{A_1 M} = 0 \Leftrightarrow \frac{7}{5} \left(x - \frac{22}{5} \right) - \frac{24}{5} \left(y + \frac{29}{5} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{7}{5}x - \frac{24}{5}y - 34 = 0$$

Une équation cartésienne de D_1 est $7x - 24y - 170 = 0$

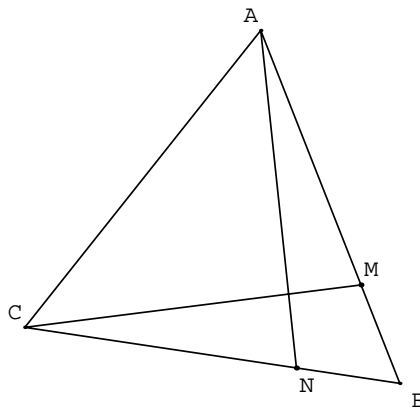
$$\text{On a : } \vec{\Omega A_2}(3; 4) \text{ et } \vec{A_2 M}(x-6; y-3)$$

$$M(x; y) \in D_2 \Leftrightarrow \vec{\Omega A_2} \cdot \vec{A_2 M} = 0 \Leftrightarrow 3(x-6) + 4(y-3) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 30 = 0$$

Une équation cartésienne de D_2 est $3x + 4y - 30 = 0$

Exercice 3

1)



$$2) \quad \vec{BA} \cdot \vec{BC} = \|\vec{BA}\| \times \|\vec{BC}\| \times \cos(\widehat{BA; BC}) = 4 \times 4 \times \cos \frac{\pi}{3} = 4 \times 4 \times \frac{1}{2} = 8$$

$$3) \quad \begin{aligned} \vec{AN} &= \vec{AB} + \vec{BN} = -\vec{BA} + k\vec{BC} \\ \vec{CM} &= \vec{CB} + \vec{BM} = -\vec{BC} + k\vec{BA} \end{aligned}$$

$$4) \quad \begin{aligned} \vec{AN} \cdot \vec{CM} &= (-\vec{BA} + k\vec{BC}) \cdot (-\vec{BC} + k\vec{BA}) = \vec{BA} \cdot \vec{BC} - k\vec{BA}^2 - k\vec{BC}^2 + k^2\vec{BA} \cdot \vec{BC} \\ &= 8 - 16k - 16k + 8k^2 = 8k^2 - 32k + 8 \end{aligned}$$



Produit dans le plan

5) Pour que les droites (AN) et (CM) soient perpendiculaires il faut et il suffit que

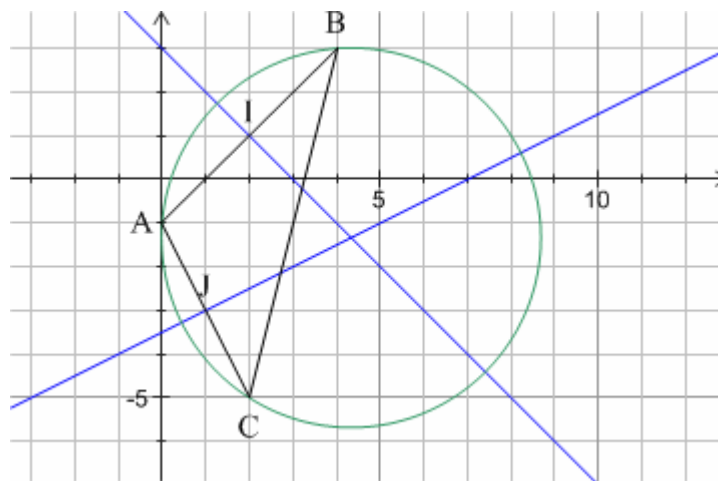
$$\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{CM} = 0 \Leftrightarrow 8k^2 - 32k + 8 = 0 \Leftrightarrow k^2 - 4k + 1 = 0$$

Le discriminant réduit de cette équation du second degré : $\Delta' = (-2)^2 - 1 = 3$ donc $\sqrt{\Delta} = \sqrt{3}$

Les solutions sont donc : $k_1 = 2 - \sqrt{3}$ et $k_2 = 2 + \sqrt{3}$

Or k est un réel de l'intervalle $[0, 1]$, seulement k_1 appartient à $[0, 1]$ donc il y'a qu'un seul réel $k = 2 - \sqrt{3}$ pour lesquelles les droites (AN) et (CM) sont perpendiculaires .

Exercice 4



1) Soit I le milieu de [AB], il a pour coordonnées $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ d'où $I(2; 1)$

Soit J le milieu de [AC], il a pour coordonnées $J\left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2}\right)$ d'où $J(1; -3)$

La médiatrice de [AB] est la droite D qui passe par I et qui est perpendiculaire à (AB)

$$\text{on a : } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{IM} \begin{pmatrix} x - 2 \\ y - 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} M(x; y) \in D &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{IM} = 0 \Leftrightarrow 4(x - 2) + 4(y - 1) = 0 \Leftrightarrow 4x + 4y - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow x + y - 3 = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, une équation de la médiatrice de [AB] est $x + y - 3 = 0$



Produit dans le plan

La médiatrice de $[AC]$ est la droite D'' qui passe par I et qui est perpendiculaire à (AB)

$$\text{On a : } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{JM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y+3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} M(x; y) \in D'' &\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{JM} = 0 \Leftrightarrow 2(x-1) - 4(y+3) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4y - 14 = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 2y - 7 = 0 \end{aligned}$$

Par suite, une équation de la médiatrice de $[AC]$ est $x - 2y - 7 = 0$

2) Le centre Ω du cercle circonscrit est le point d'intersection des médiatrices, ses coordonnées vérifient donc le système :

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 & L_1 \\ x - 2y - 7 = 0 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y + 4 = 0 & L_1 - L_2 \\ 3x - 13 = 0 & 2L_1 + L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{4}{3} \\ x = \frac{13}{4} \end{cases} \text{ donc } \Omega\left(\frac{13}{4}; -\frac{4}{3}\right)$$

3) Le rayon R du cercle circonscrit vérifie $R^2 = A\Omega^2 = (x_\Omega - x_A)^2 + (y_\Omega - y_A)^2 = \frac{170}{9}$

Une équation du cercle circonscrit au triangle ABC est donc $\left(x - \frac{13}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{170}{9}$

Exercice 5

La somme des angles dans un triangle vaut 180° donc $\gamma = 180 - (44+38) = 98$

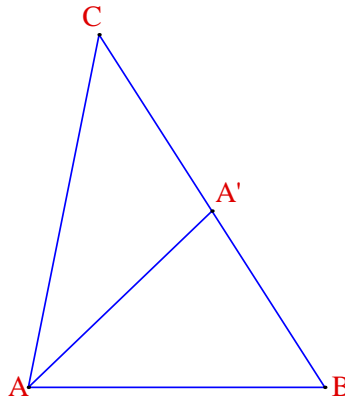
$$\text{On a } \frac{AB}{\sin \gamma} = \frac{AC}{\sin \beta} = \frac{BC}{\sin \alpha} \quad \text{donc} \quad AC = \frac{AB \times \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{80,42 \times \sin 38^\circ}{\sin 98^\circ} \approx 49,998$$

La longueur AC mesure donc 50 m au cm près par excès.



Produit dans le plan

Exercice 6



1. D'après le théorème de la médiane : $AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{1}{2}BC^2$

$$\text{donc } AA'^2 = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2) - \frac{1}{4}BC^2 = \frac{1}{2}(5^2 + 6^2) - \frac{1}{4} \times 7^2 = \frac{73}{4}$$

$$\text{donc } AA' = \frac{\sqrt{73}}{2} \approx 4,27$$

2. D'après le théorème d'Al Kashi : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$

$$\text{donc } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$$

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \times AC} = \frac{5^2 + 6^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 6} = 0,2$$

$$\text{donc } \widehat{BAC} \approx 78,5^\circ$$