Produit dans le plan (2)

Exercice 1

ABCD est un carré direct de côté 1. On construit le triangle équilatéral direct *ABE*, puis le carré direct *EBGF*.

1. Compléter la figure1
2. Que vaut l'angle $\widehat{CBE}$? En déduire $\overrightarrow{BC}\bullet\overrightarrow{BE}$ puis $\overrightarrow{DA}\bullet\overrightarrow{BE}$.
3. Calculer $\overrightarrow{EA}\bullet\overrightarrow{EB}$.
4. Démontrer que le triangle *BCG* est équilatéral. En déduire $\overrightarrow{BC}\bullet\overrightarrow{BG}$ puis $\overrightarrow{DA}\bullet\overrightarrow{EF}$.
5. Calculer $\overrightarrow{AE}\bullet\overrightarrow{EF}$.
6. En utilisant la relation de Chasles, calculer $\overrightarrow{DE}\bullet\overrightarrow{BF}$.
7. En déduire que les points *D*, *E*, *G* sont alignés.

Exercice 2

Cet exercice est un QCM. Indiquer pour chaque question la réponse exacte (remplir le tableau sur la feuille annexe). Aucune justification n'est demandée.

1. *ABC* est un triangle équilatéral de côté 4. I et H sont les milieux respectifs de [*AC*] et [*BC*]. I se projette en D sur (AH) (voir figure 2) . Alors
   a) $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AI} = AH \times AD$ b) $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AI} = 8$ c) $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AI} = 4$
2. Dans la même figure,
   a) $\overrightarrow{DC}\bullet\overrightarrow{AB} = 0$ b) $\overrightarrow{DC}\bullet\overrightarrow{DB} = 0$ c) $\overrightarrow{DA}\bullet\overrightarrow{BH} = 0$
3. *A*, *B*, *C* sont trois points non alignés tels que $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC} = 8$ et *AC* = 3. Alors
   a) $\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{8}{3}$ b) $AB = \dfrac{8}{3}$ c) $\overrightarrow{AC}\bullet\overrightarrow{BC} = 1$
4. Dans un repère orthonormal, $\overrightarrow{AB}(-4;3)$ et $\overrightarrow{CB}(-1;5)$. Alors
   a) $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC} = 6$ b) $BC = 26$ c) $\overrightarrow{BC}\bullet\overrightarrow{AB} = 19$
5. Dans un repère orthonormal, la courbe d'équation $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 23 = 0$ est un cercle
   a) de rayon $\sqrt{23}$ b) de rayon $\sqrt{6}$ c) de centre $\Omega(-5;4)$
6. *ABC* est un triangle avec *AB* = 4, *BC* = 6 et $\widehat{ABC} = 40°$. Alors l'arrondi au centième de *AC* est a) 3,9 b) 15,23 c) 3,91
7. *ABC* est un triangle avec *AB* = 3, *AC* = 5, *BC* = 6. *I* est le milieu de [BC]. Alors
   a) $AI = 4$ b) $AI = 2\sqrt{2}$ c) $AI = \sqrt{26}$

Exercice 3

ABCD et *AEFG* sont deux carrés, comme sur la figure 3. Les droites (*DF*) et (*CE*) se coupent en *I*.

1. Compléter la figure. Que pensez-vous des droites (*AI*) et (*DE*) ?
2. On se place dans un repère orthonormal $(A,\vec{i},\vec{j})$ avec $\vec{i}$ colinéaire à $\overrightarrow{AD}$ et de même sens, et $\vec{j}$ colinéaire à $\overrightarrow{AE}$ et de même sens. On suppose pour simplifier que *AD* = 2 et *AE* = 3. Donner les coordonnées des sommets des carrés.
3. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{FD}$, en déduire qu'une équation de la droite (*DF*) est $3x + 5y - 6 = 0$.
4. Donner une équation de la droite (*CE*).
5. En déduire que les coordonnées de *I* sont $I\left(\dfrac{18}{19},\dfrac{12}{19}\right)$ et la preuve de la conjecture du 1.

Produit dans le plan (2)

Feuille annexe

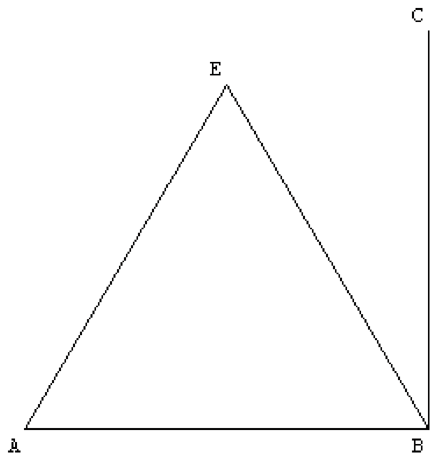


Figure 1

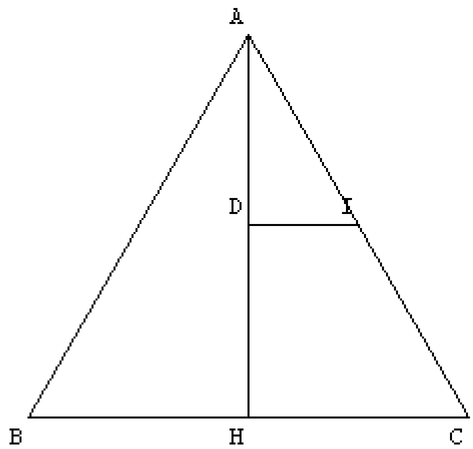


Figure 2

Question	1	2	3	4	5	6	7
Réponse							

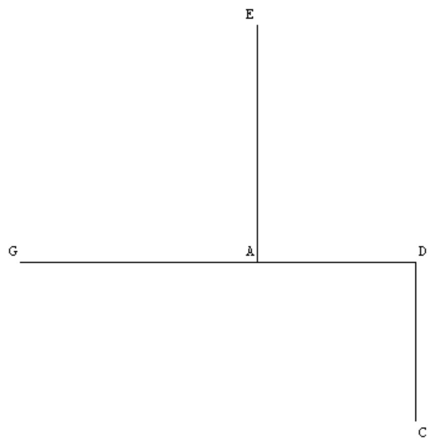


Figure 3

Exercice 1

2. L'angle $\widehat{ABC}$ est droit et l'angle $\widehat{ABE}$ vaut 60° donc l'angle $\widehat{EBC}$ vaut 30°.

   On en déduit que $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BE} = BC\times BE\times\cos\left(\widehat{EBC}\right)=\cos(30°)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   Comme $\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BE}=-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BE}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3. $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}=EA\times EB\times\cos\left(\widehat{AEB}\right)=\cos(60°)=\dfrac{1}{2}$

4. On sait que $BC=BG=1$ (propriétés des carrés et des triangles équilatéraux). D'autre part, $\widehat{CBG}=\widehat{EBG}-\widehat{EBC}=60°$. Le triangle *BCG*, isocèle avec un angle de 60°, est équilatéral.

   Par suite, $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BG}=BC\times BG\times\cos\left(\widehat{CBG}\right)=\cos(60°)=\dfrac{1}{2}$

   Et comme $\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{EF}=-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BG}=-\dfrac{1}{2}$.

5. Calculons maintenant $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}\cdot\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}\right)=AE^2+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EF}=1+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EF}$.

   D'autre part, $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EF}=-\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EF}=-EA\times EF\times\cos\left(\widehat{FEA}\right)$ et comme on peut écrire $\widehat{FEA}=\widehat{FEB}+\widehat{BEA}=150°$, $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{EF}=-\cos(150°)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   Finalement $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

6. Calculons maintenant $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BF}$ avec la relation de Chasles :
   $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BF}=\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EF}\right)=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$.

   Il se trouve que tous ces produits ont déjà été calculés, à l'exception de $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}$, mais on sait que $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}=\left(-\overrightarrow{EA}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{EB}\right)=\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}=\dfrac{1}{2}$.

   Finalement $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BF}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0$

7. On vient de prouver que (*DE*) est perpendiculaire à (*BF*). Il est bien connu que (*EG*) et (*BF*) sont perpendiculaires (diagonales d'un carré). Les droites (*DE*) et (*EG*) sont donc parallèles, et comme elles ont *E* en commun, les points *D*, *E* et *G* sont alignés.

Exercice 2

1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}=AB\times AI\times\cos\left(\widehat{BAI}\right)=4\times2\times\cos(60°)=4$: réponse c.
2. (*DA*) et (*BH*) sont perpendiculaires donc $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BH}=0$: réponse c.
3. a) est forcément faux (un cosinus est entre –1 et 1). b) serait vrai si *A*, *B*, *C* étaient alignés (puisque $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$, si $AB=\dfrac{8}{3}$ alors $\cos\left(\widehat{BAC}\right)=1$), reste c.

   Vérifions : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=AC^2-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=9-8=1$

4. b) est faux ($BC=\sqrt{26}$) ainsi que c ($\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AB}=-\left(-4\times(-1)+3\times5\right)=-19$), il reste a). Vérifions : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=AB^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=25-19=6$
5. Mettons sous forme canonique l'équation du cercle :
   $x^2+y^2-10x+4y+23=0\Leftrightarrow(x-5)^2-25+(y+2)^2-4+23=0\Leftrightarrow(x-5)^2(y+2)^2=6$ Le centre a pour coordonnées $(5;-2)$ et le rayon est $\sqrt{6}$. Réponse b)
6. $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC\times\cos\left(\widehat{ABC}\right)=16+36-48\cos(40°)$ d'après la relation d'Al Kashi. On obtient à la calculatrice $AC\approx3{,}902$. Réponse a)
7. Le théorème de la médiane s'écrit $AB^2+AC^2=2AI^2+\dfrac{BC^2}{2}$, soit $9+25=2AI^2+\dfrac{36}{2}$, on obtient donc $AI=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$. Réponse b)

Finalement

Question	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Réponse	**c**	**c**	**c**	**a**	**b**	**a**	**b**

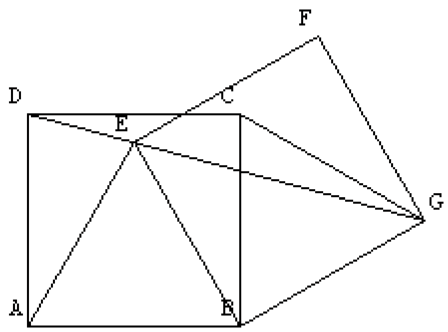
Exercice 3

1. Les droites (AI) et (DE) semblent perpendiculaires.
2. Sachant que $ABCD$ est de côté 2 et $AEFG$ de côté 3, on a :
   $A(0;0)$, $B(0;-2)$, $C(2;-2)$, $D(2;0)$, $E(0;3)$, $F(-3;3)$, $G(0;-3)$
3. $\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix}2-(-3)\\0-3\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{FD}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$. La droite ($FD$) passe par D, et elle est dirigée par $\overrightarrow{FD}$, un point $M(x;y)$ lui appartient si et seulement si $\overrightarrow{DM}$ et $\overrightarrow{FD}$ sont colinéaires, soit si et seulement si $-3(x-2)=5(y-0)\Leftrightarrow-3x+6=5y\Leftrightarrow3x+5y-6=0$.
4. $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}2-0\\-2-3\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$. Le coefficient directeur de (EC) est donc $-\dfrac{5}{2}$, et son ordonnée à l'origine est clairement 3 (l'ordonnée de E). Elle e donc pour équation réduite $y=-\dfrac{5}{2}x+3$ ou pour équation cartésienne $2y=-5x+6\Leftrightarrow5x+2y-6=0$.
5. Résolvons le système formé par les équations de (FD) et (EC) pour déterminer les coordonnées de I :
   $\begin{cases}3x+5y=6 & (\times5) & (\times2)\\5x+2y=6 & (\times-3) & (\times-5)\end{cases}$. Il vient : $\begin{cases}15x+25y=30\\-15x-6y=-18\end{cases}$ donc $19y=12$ et $y=\dfrac{12}{19}$ et
   $\begin{cases}6x+10y=12\\-25x-10y=-30\end{cases}$ donc -$19x=-18$ et $y=\dfrac{18}{19}$. Finalement $I\left(\dfrac{18}{19},\dfrac{12}{19}\right)$.

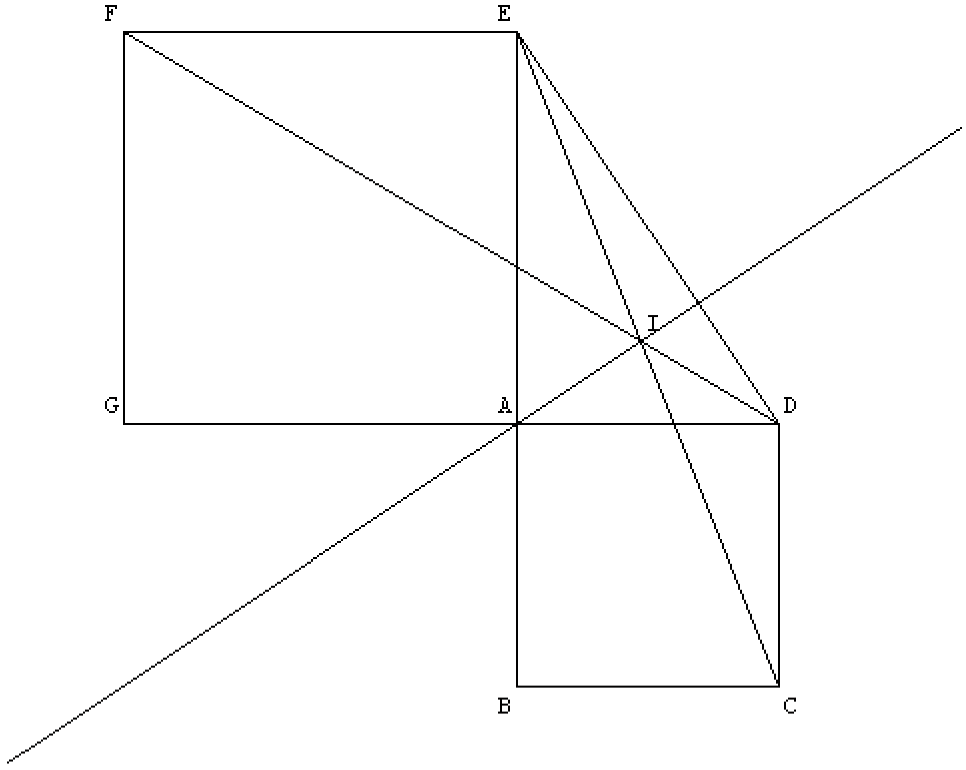
   On a donc $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}\dfrac{18}{19}\\\dfrac{12}{19}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{ED}=2\times\dfrac{18}{19}-3\times\dfrac{12}{19}=0$. Les droites ($AI$) et ($ED$) sont donc perpendiculaires.

   Remarque : en appelant a et b les côtés des deux carrés, on pourrait faire les mêmes calculs (en plus compliqué), et on obtiendrait toujours la même orthogonalité.

Figures :



Exercice 1



Exercice 3