



Suites réelles

Exercice n°1 :

Soit $(u_n)_{n>0}$ la suite définie par $u_1 = 2$ et pour tout entier $n > 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - \frac{2}{3}$.

1. Représenter sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite (u_n) , unité graphique 2 cm.
Quel conjecture peut-on faire sur la limite de la suite ?
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n>0}$ définie par $v_n = u_n + 1$ est géométrique, on donnera la raison et le premier terme.
3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
4. On pose $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Exprimer S_n en fonction de n .
5. Étudier la convergence des suites $(u_n)_{n>0}$ et $(S_n)_{n>0}$.

Exercice n°2 :

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n , $u_{n+1} = \frac{2}{3}(u_n + 1)$

1. Démontrer que la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = 2 - u_n$ est une suite géométrique.
2. En déduire une expression de u_n en fonction de n et trouver la limite de la suite (u_n) .

Exercice n°3 :

La suite (u_n) est définie par $u_0 = -2$ et pour tout entier n , $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$.

La suite (v_n) est définie pour tout entier n par $v_n = u_n + 3$

1. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
2. Exprimer v_n en fonction de n , puis en déduire une expression de u_n en fonction de n .
3. En déduire la limite de la suite (u_n) .
4. (S_n) la suite définie pour tout entier n par $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k$
 - a. Exprimer S_n en fonction de n .
 - b. En déduire la limite de la suite (S_n) .



Suites réelles

Exercice n°4 :

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n , $2u_{n+1} = u_n - 1$

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite (u_n) .
2. α est un nombre réel. La suite (v_n) est définie pour tout entier n par $v_n = u_n - \alpha$
 - a. Trouver le réel α tel que la suite (v_n) soit une suite géométrique.
 - b. Exprimer (v_n) et (u_n) en fonction de n .
 - c. Etudier le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) .

Exercice n°5 :

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n , $u_{n+1} = 2u_n - \frac{1}{3}$

La suite (v_n) est définie pour tout entier n par $v_n = u_n - \alpha$

1. Trouver le réel α tel que la suite (v_n) soit une suite géométrique.
2. La suite (v_n) est-elle convergente ?
3. Exprimer v_n en fonction de n et calculer $s_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = \sum_{k=0}^n v_k$
4. Exprimer u_n en fonction de n et calculer $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k$

Exercice n°6 :

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = -1$ et pour tout entier positif n , $u_{n+1} = \frac{9}{6 - u_n}$.

On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.
2. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
3. Calculer $S = \sum_{k=0}^{k=100} v_k$.



Suites réelles

Exercice n°7 :

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier n , $u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}$

1. Démontrer que pour tout entier n , $u_n > 1$.
2. La suite (v_n) est définie pour tout entier n par : $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$
Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et préciser sa limite.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et trouver sa limite.

Exercice n°8 :

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 3$ et pour tout entier n , $u_{n+1} = \frac{2}{u_n + 1}$

1. Démontrer que pour entier n , $u_n > 0$.
2. La suite (v_n) est définie pour tout entier n par : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$
Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et préciser sa limite.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et trouver sa limite.

Exercice n°9 :

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 0$ et pour tout entier n , $u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$

1. Démontrer, par récurrence, que : pour tout n , $0 \leq u_n < 1$.
2. Démontrer que la suite (u_n) est monotone.
3. La suite (v_n) est définie pour tout entier n par : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

4. Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n et trouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Suites réelles

Exercice n°10 :

La suite (u_n) est définie par : $u_1 = \frac{2}{7}$ et pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{3 - u_n}$

(On admettra que quel que soit $n \geq 1$, $u_n \neq 0$ et $u_n \neq 3$).

1. Calculer u_2 et u_3 .
2. La suite (v_n) est définie pour tout $n \geq 1$ par : $v_n = \frac{1}{u_n}$
 - a. Calculer v_1 .
 - b. Démontrer que pour tout $n \geq 1$: $v_{n+1} = 3v_n - 1$
3. La suite (w_n) est définie par : $w_n = v_n - \frac{1}{2}$
 - a. Exprimer w_{n+1} en fonction de w_n et calculer le premier terme w_1 .
 - b. Quelle est la nature de la suite (w_n) ?
 - c. Exprimer w_n en fonction de n .
4.
 - a. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
 - b. La suite (u_n) est-elle convergente ?

Exercice n°11 :

On définit la suite (u_n) par : $u_0 = -3$ et pour tout entier n , $u_{n+1} = \frac{u_n - 8}{2u_n - 9}$

1. Démontrer, par récurrence, que pour tout n , $u_n < 1$.
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante et qu'elle converge.
3. La suite (v_n) est définie pour tout entier n par : $v_n = 1 - u_n$

Démontrer que, pour tout n : $v_{n+1} < \frac{1}{7}v_n$ et en déduire la limite de la suite (v_n) .

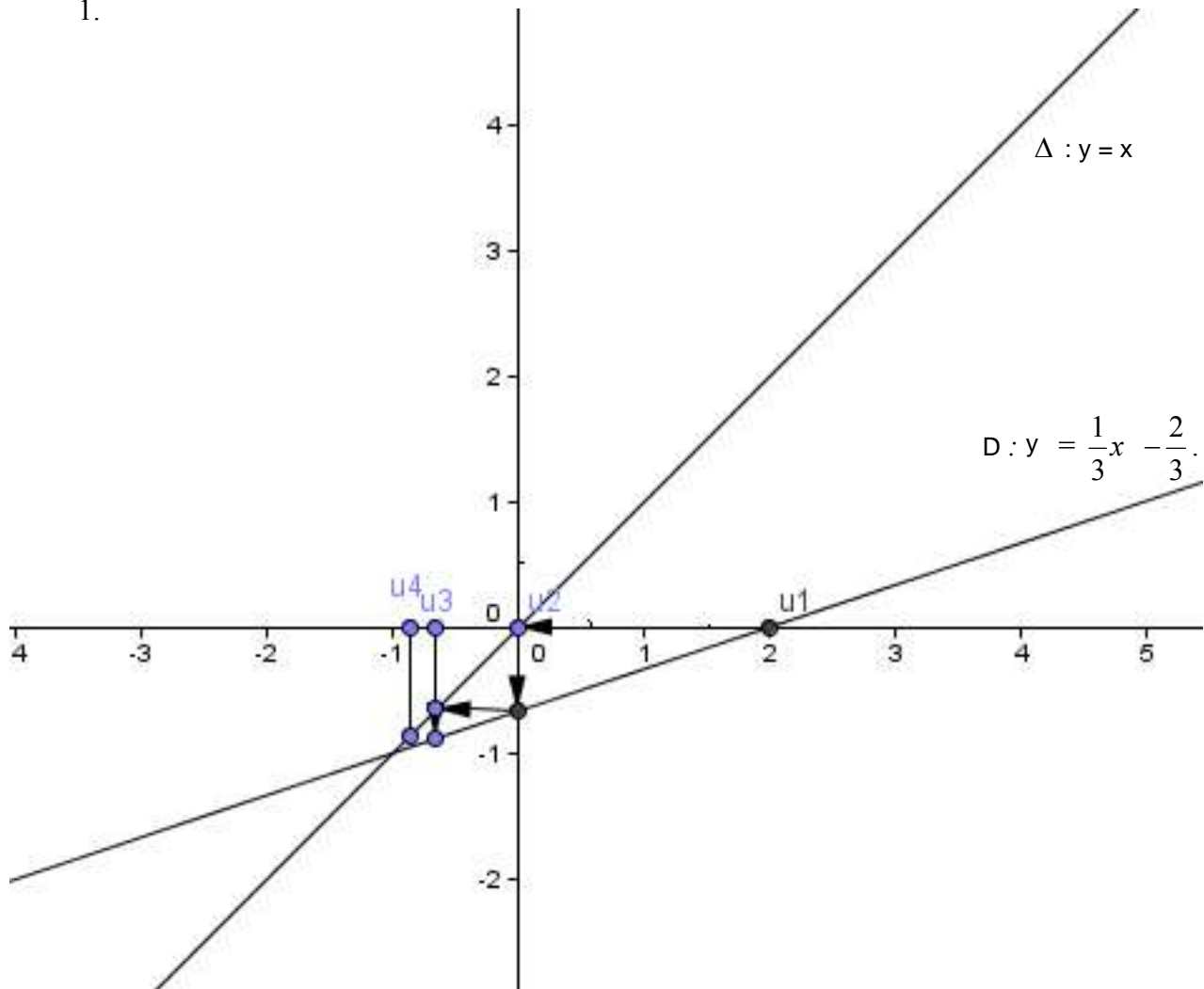
4. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?



Suites réelles : corrigé

Exercice n°1 :

1.



$$u_1 = 2$$

$$u_2 = \frac{1}{3}u_1 - \frac{2}{3} = 0$$

$$u_3 = \frac{1}{3}u_2 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$u_4 = \frac{1}{3}u_3 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{9} - \frac{2}{3} = -\frac{8}{9}$$

On constate que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$.



Suites réelles : corrigé

2. Soit n un entier naturel non nul.

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = \frac{1}{3}u_n - \frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}v_n.$$

La suite $(v_n)_{n>0}$ est donc géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$.

De plus, pour tout entier naturel n non nul, $v_n = u_n + 1$, en particulier, $v_1 = u_1 + 1 = 3$.

Ainsi, la suite $(v_n)_{n>0}$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_1 = 3$.

3. D'après la question précédente, pour tout $n > 0$, $v_n = v_1 q^{n-1} = 3 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$.

Soit pour tout $n > 0$, $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$.

Comme pour tout $n > 0$, $v_n = u_n + 1$, il vient que pour tout $n > 0$, $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} - 1$.

4. Soit n un entier naturel non nul.

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = v_1 - 1 + v_2 - 1 + \dots + v_n - 1 = v_1 + v_2 + \dots + v_n - n.$$

$v_1 + v_2 + \dots + v_n$ est la somme des n premiers termes de la suite géométrique de raison e

$$\text{et de premier terme } v_1 = 2, \text{ donc } v_1 + v_2 + \dots + v_n = 3 \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = 3 \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} = \frac{9}{2} \times \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right].$$

$$\text{Donc, pour tout } n > 0, S_n = \frac{9}{2} \times \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] - n.$$

Suites réelles : corrigé

5. Pour tout $n > 0$, $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} - 1$. Or $0 < \frac{1}{3} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} = 0$.

Donc, il vient par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$.

Pour tout $n > 0$, $S_n = \frac{9}{2} \times \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] - n$. Comme $0 < \frac{1}{3} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9}{2} \times \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] = \frac{9}{2}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\infty$.

Exercice n°2 :

1. On a $v_{n+1} = 2 - u_{n+1} = 2 - \frac{2}{3}(u_n + 1) = 2 - \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}u_n = \frac{2}{3}(u_n - 2) = \frac{2}{3}v_n$

Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

2. La suite (v_n) étant une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = 1$, on a

On a $v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n v_0 \Rightarrow u_n = 2 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Or $-1 < \frac{2}{3} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \left(\frac{2}{3}\right)^n = 2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$

Donc la suite (u_n) converge vers 2.

Exercice n°3 :

1. On a $v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = \frac{2}{3}u_n - 1 + 3 = \frac{2}{3}u_n + 2 = \frac{2}{3}(u_n + 3) = \frac{2}{3}v_n \Rightarrow$ la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

2. La suite (v_n) étant une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = 1$, on a $v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n v_0$

Donc, pour tout entier n $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3$.

Suites réelles : corrigé

$$3. \text{ Or } -1 < \frac{2}{3} < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n - 3 = -3 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -3$$

Donc la suite (u_n) converge vers 3.

$$4. (S_n) \text{ la suite définie pour tout entier } n \text{ par } S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

$$\begin{aligned} \text{a. On a } S_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n \left[\left(\frac{2}{3}\right)^k - 3 \right] = \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k - \sum_{k=0}^n 3 \\ &= \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} - 3(n+1) = \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \right] - 3n - 3 = -3n - 3 \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

$$\text{b. On a } -1 < \frac{2}{3} < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -3n - 3 \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = -\infty$$

$$\text{Donc, } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\infty$$

Exercice n°4 :

$$1. \text{ On a } u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - 1) \Rightarrow u_1 = \frac{1}{2}(u_0 - 1) = 0 ; u_2 = \frac{1}{2}(u_1 - 1) = -\frac{1}{2} ; u_3 = -\frac{3}{4} \text{ et } u_4 = -\frac{7}{8}.$$

2. α est un nombre réel. La suite (v_n) est définie pour tout entier n par $v_n = u_n - \alpha$

$$\text{a. On a } v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{2} - \alpha = \frac{1}{2}(u_n - 1 - 2\alpha).$$

$$\text{La suite } (v_n) \text{ est géométrique } \Leftrightarrow -1 - 2\alpha = -\alpha \Leftrightarrow \alpha = -1.$$

Donc, pour tout entier n , on a $v_n = u_n + 1$

b. La suite (v_n) étant une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 2$, on a

$$v_n = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ d'où } u_n = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1.$$

$$\text{c. On a } u_{n+1} - u_n = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1 - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

donc la suite (u_n) est décroissante.

Suites réelles : corrigé

Exercice n°5 :

$$1. \text{ On a } v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = 2u_n - \frac{1}{3} - \alpha = 2\left(u_n - \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\alpha\right).$$

$$\text{La suite } (v_n) \text{ est géométrique} \Leftrightarrow -\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\alpha = -\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Donc, pour tout entier } n, \text{ on a } v_n = u_n - \frac{1}{3}$$

$$2. \text{ La suite } (v_n) \text{ étant une suite géométrique de raison } 2 \text{ et de premier terme } v_0 = \frac{5}{3}, \text{ on a } v_n = \frac{5}{3} \times 2^n$$

$$2 > 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

$$3. \text{ On a } v_n = \frac{5}{3} \times 2^n \Rightarrow s_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = \sum_{k=0}^n v_k = \sum_{k=0}^n \frac{5}{3} \times 2^k = \frac{5}{3} \sum_{k=0}^n 2^k = \frac{5}{3} \times \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = -\frac{5}{3} \times (1-2^{n+1})$$

$$4. \text{ On a } u_n = v_n + \frac{1}{3} \Rightarrow u_n = \frac{5}{3} \times 2^n + \frac{1}{3}$$

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n v_k + \frac{1}{3}(n+1) = -\frac{5}{3} \times 1 + \frac{5}{3} \times 2^{n+1} - \frac{1}{3}n - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \times 2^{n+1} - \frac{1}{3}n - 2$$

Exercice n°6 :

1. Pour tout n de \mathbb{N} ,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\frac{6-u_n}{9-3u_n}} - \frac{1}{u_n} = \frac{6-u_n}{9-3u_n} - \frac{1}{u_n-3} \\ &= \frac{6-u_n}{3(u_n-3)} - \frac{3}{3(u_n-3)} = \frac{6-u_n-3}{3(u_n-3)} = \frac{3-u_n}{3(u_n-3)} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

(v_n) est arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.

$$2. \text{ Soit } n \text{ un entier naturel, } v_n = v_0 + \left(-\frac{1}{3}\right)n = -\frac{1}{4} - \frac{1}{3}n = \frac{-3-4n}{12}$$

$$\text{On a } v_n = \frac{1}{u_n-3} \Leftrightarrow u_n v_n - 3v_n = 1 \Leftrightarrow u_n = \frac{1+3v_n}{v_n} = \frac{1}{v_n} + 3 \text{ (par définition } v_n \neq 0)$$

$$\text{D'où } u_n = \frac{-12}{3+4n} + 3 = \frac{-12+9+12n}{3+4n} = \frac{-3+12n}{3+4n}.$$

$$\text{Pour tout } n, u_n = \frac{-3+12n}{3+4n}.$$

3. Pour tout $n > 0$,

$$\sum_{k=0}^n v_k = \frac{n+1}{2} \times (v_0 + v_n) = \frac{n+1}{2} \times \left(-\frac{1}{4} + \frac{-3-4n}{12}\right) = \frac{n+1}{2} \times \left(\frac{-3-3-4n}{12}\right) = \frac{(n+1)(-3-2n)}{12}$$

$$\text{D'où } \sum_{k=0}^{100} v_k = \frac{(100+1)(-3-200)}{12} = -\frac{20503}{12}$$

Suites réelles : corrigé

Exercice n°7 :

1. On a $u_0 = 3 > 1$

On suppose que $u_n > 1$ et on montre que $u_{n+1} > 1$

On a $u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}$. Or on a $4u_n - 2 - (u_n + 1) = 3u_n - 3$. Or on suppose que $u_n > 1 \Leftrightarrow 3u_n - 3 > 0$

$$\Leftrightarrow 4u_n - 2 - (u_n + 1) > 0 \Leftrightarrow 4u_n - 2 > (u_n + 1) \Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1} > 1$$

Donc, pour tout entier n , on a $u_n > 1$

$$2. \text{ On a : } v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{4u_n - 2}{u_n + 1} - 2}{\frac{4u_n - 2}{u_n + 1} - 1} = \frac{4u_n - 2 - 2(u_n + 1)}{4u_n - 2 - (u_n + 1)} = \frac{2u_n - 4}{3u_n - 3} = \frac{2}{3} \times \frac{u_n - 2}{u_n - 1} = \frac{2}{3} v_n$$

la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = \frac{5}{2}$, on a $v_n = \frac{5}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

$$\text{Or } -1 < \frac{2}{3} < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

Donc la suite (v_n) converge vers 0.

$$3. \text{ On a } v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1} \Leftrightarrow v_n(u_n - 1) = u_n - 2 \Leftrightarrow v_n u_n - v_n - u_n = -2$$

$$\Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = v_n - 2 \Leftrightarrow u_n = \frac{v_n - 2}{v_n - 1}$$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2 \Rightarrow$ la suite (u_n) est convergente et sa limite est 2.

Exercice n°8 :

1. On a $u_0 = 3 > 0$

On suppose que $u_n > 0$ et on montre que $u_{n+1} > 0$

$$\text{On a } u_{n+1} = \frac{2}{u_n + 1}. \text{ Or on suppose que } u_n > 0 \Rightarrow u_n + 1 > 0 \Rightarrow u_{n+1} = \frac{2}{u_n + 1} > 0$$

Donc, pour tout entier n , on a $u_n > 0$



Suites réelles : corrigé

$$2. \text{ On a : } v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \frac{\frac{2}{u_n+1}-1}{\frac{2}{u_n+1}+2} = \frac{2-(u_n+1)}{2+2(u_n+1)} = \frac{-u_n+1}{2u_n+4} = -\frac{1}{2} \times \frac{u_n-1}{u_n+2} = -\frac{1}{2} v_n$$

la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \frac{2}{5}$,

donc pour tout entier naturel n , on a : $v_n = \frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

$$\text{Or } -1 < -\frac{1}{2} < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{5} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

Donc la suite (v_n) converge vers 0.

$$3. \text{ On a } v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2} \Leftrightarrow v_n(u_n+2) = u_n-1 \Leftrightarrow v_n u_n + 2v_n - u_n = -1$$

$$\Leftrightarrow u_n(v_n-1) = 2v_n-1 \Rightarrow u_n = \frac{2v_n-1}{v_n-1}$$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ donc la suite (u_n) est convergente et sa limite est 1.

Exercice n°9 :

$$1. \text{ On a } u_0 = 0 \text{ donc } 0 \leq u_0 < 1$$

On suppose que $0 \leq u_n < 1$ et on montre que $0 \leq u_{n+1} < 1$

$$\text{On a } u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2}$$

$$\text{Or } u_n > 0 \Rightarrow 2u_n+1 > 0 \text{ et } u_n+2 > 0 \Rightarrow u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2} > 0$$

$$\text{D'autre part } u_n < 1, 2u_n+1-(u_n+2) = u_n-1 < 0 \Rightarrow 2u_n+1 < (u_n+2) \Rightarrow u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2} < 1$$

Donc, pour tout entier n , on a $0 \leq u_n < 1$

$$2. \text{ On a } u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n+1}{u_n+2} - u_n = \frac{2u_n+1-u_n(u_n+2)}{u_n+2} = \frac{-u_n^2+1}{u_n+2} = \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{u_n+2}$$

or pour tout entier n , on a $0 \leq u_n < 1$

Suites réelles : corrigé

donc $u_{n+1} - u_n > 0$ d'où la suite (u_n) est monotone.

$$3. \text{ On a : } v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2} - 1}{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2} + 2} = \frac{2u_n + 1 - (u_n + 2)}{2u_n + 1 + (u_n + 2)} = \frac{u_n - 1}{3u_n + 3} = \frac{1}{3} \times \frac{u_n - 1}{u_n + 1} = \frac{1}{3} v_n$$

la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = -1$, on a $v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

$$\text{Or } -1 < \frac{1}{3} < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

Donc la suite (v_n) converge vers 0.

$$4. \text{ On a } v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \Leftrightarrow u_n = \frac{v_n + 1}{1 - v_n} = \frac{-\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 \Rightarrow$ la suite (u_n) est convergente et sa limite est 1.

Exercice n°10 :

$$1. \text{ On a } u_2 = \frac{2}{19} \text{ et } u_3 = \frac{2}{55}$$

$$2. \text{ a. On a } v_1 = \frac{1}{u_1} = \frac{7}{2}$$

$$\text{b. On a } v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{\frac{u_n}{3 - u_n}} = \frac{3 - u_n}{u_n} = \frac{3}{u_n} - 1 = 3v_n - 1 \Rightarrow \text{pour tout } n \geq 1, \text{ on a : } v_{n+1} = 3v_n - 1$$

$$3. \text{ On a } w_{n+1} = v_{n+1} - \frac{1}{2} = 3v_n - 1 - \frac{1}{2} = 3v_n - \frac{3}{2} = 3\left(v_n - \frac{1}{2}\right) = 3w_n$$

Donc, la suite (w_n) est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $w_1 = 3$.

$$\text{Ainsi, on a } w_n = 3 \times 3^n = 3^{n+1}$$

$$4. \text{ a. On a } w_n = 3^{n+1} \text{ et } w_n = v_n - \frac{1}{2} \Rightarrow v_n = w_n + \frac{1}{2} = 3^{n+1} + \frac{1}{2}$$

$$\text{Or, } v_n = \frac{1}{u_n} \Rightarrow u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{3^{n+1} + \frac{1}{2}}$$

$$\text{b. On a } 3 > 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (3)^{n+1} = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^{n+1} + \frac{1}{2} = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^{n+1} + \frac{1}{2}} = 0$$

Donc, la suite (u_n) est-elle convergente et sa limite est 0.



Suites réelles : corrigé

Exercice n°11 :

1. On a $u_0 = -3 < 1$

On suppose $u_n < 1$ et on montre que $u_{n+1} < 1$

$$\text{On a } u_{n+1} = \frac{u_n - 8}{2u_n - 9} = \frac{1}{2} \times \frac{u_n - 8}{u_n - \frac{9}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{u_n - \frac{9}{2} - \frac{7}{2}}{u_n - \frac{9}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{-\frac{7}{2}}{u_n - \frac{9}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{7}{9 - 2u_n}$$

$$\text{Or } u_n < 1 \Leftrightarrow 9 - 2u_n > 7 \Leftrightarrow \frac{7}{9 - 2u_n} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{7}{9 - 2u_n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow u_{n+1} < 1$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n < 1$

2. On a $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n - 8}{2u_n - 9} - u_n = \frac{u_n - 8 - u_n(2u_n - 9)}{2u_n - 9} = \frac{-2u_n^2 + 10u_n - 8}{2u_n - 9}$

On étudie le signe du numérateur et du dénominateur.

L'étude de $-2x^2 + 10x - 8$ sur $] -\infty ; 1 [$ montre que le trinôme est négatif. (calcul de Δ)

$$\text{On a } 2u_n - 9 < 0 \text{ donc, } u_{n+1} - u_n = \frac{-2u_n^2 + 10u_n - 8}{2u_n - 9} > 0$$

Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

Par conséquent, La suite étant croissante et majorée par 1, elle converge.

3. On a $v_{n+1} = 1 - u_{n+1} = 1 - \frac{u_n - 8}{2u_n - 9} = \frac{u_n - 1}{2u_n - 9} = \frac{v_n}{9 - 2u_n}$. Or $9 - 2u_n > 7 \Rightarrow \frac{1}{9 - 2u_n} < \frac{1}{7}$

$$\text{Donc, } v_{n+1} = \frac{v_n}{9 - 2u_n} < \frac{1}{7} v_n \text{ et } v_n > 0.$$

$$\text{Par récurrence, on montre facilement que } v_n < \left(\frac{1}{7}\right)^n v_0 = 4 \times \left(\frac{1}{7}\right)^n.$$

$$\text{Or } -1 < \frac{1}{7} < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

4. Pour tout n de \mathbb{N} , on a $v_n = 1 - u_n \Rightarrow u_n = 1 - v_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - v_n = 1$

Donc, la limite de la suite (u_n) est 1.