Suites adjacentes : cours et applications

Définition:

On dit que deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont adjacentes si elles vérifient les propriétés suivantes :

1. (u_n) est croissante, et (v_n) est décroissante ;
2. la suite $(v_n - u_n)$ tend vers zéro.

Théorème:

Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.

Démonstration:

Il suffit de montrer que les suites sont bornées

en fait il suffit de montrer que l'une d'elles est bornées, car $(v_n - u_n)$ l'est aussi (elle converge, par hypothese , et donc l'autre devra alors aussi être bornée par addition ou soustraction.

Montrons donc que (u_n) est bornée. D'abord elle est évidemment minorée par u_0, puisqu'elle est croissante : $u_n \geqslant u_{n-1} \geqslant u_{n-2} \geqslant \cdots \geqslant u_1 \geqslant u_0$ (et de même (v_n) est minorée par v_0).
Mais on souhaite plutôt savoir qu'elle est majorée.

Comme $(v_n - u_n)$ converge, elle est bornée, donc il existe $\mu \geqslant 0$ tel que $|v_n - u_n| \leqslant \mu$ pour tout n. Cela implique notamment que $u_n \leqslant \mu + v_n$; mais $v_n \leqslant v_0$, donc $u_n \leqslant \mu + v_0$ pour tout n, ce qui termine la démonstration.

Suites adjacentes : cours et applications

Exercice 1

Démontrer que les 2 suites (u_n) et (v_n) définies sur N par $u_n = 1 + \frac{1}{n!}$ et $v_n = \frac{n}{n+1}$ sont adjacentes.

Exercice 2

Soit la suite (u_n) définie sur N* par $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$

Démontrer que les deux suites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) sont adjacentes.

En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

Exercice 3

Démontrer que les 2 suites (u_n) et (v_n) définies sur N* par $u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$ et $v_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} + \frac{1}{n}$ sont adjacentes.

Vérifier à l'aide d'une calculatrice que leur limite commune a pour valeur approchée $\frac{\pi^2}{6}$

Exercice 4

Démontrer que les 2 suites (u_n) et (v_n) définies sur N par $u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\,!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n\,.\,n\,!}$ sont adjacentes.

On admettra que leur limite commune est e, la base du logarithme népérien. e ≈ 2,718.

Suites adjacentes : cours et applications

Corrigé 1 :

démontrons que (u_n) est décroissante :

pour tout n de N, $u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{(n+1)!} - (1 + \frac{1}{n!}) = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{n+1}{(n+1)!}$

$= - \frac{n}{(n+1)!} \leq 0$ car $n \geq 0$ et $(n+1)! > 0$

donc (u_n) est décroissante.

démontrons que (v_n) est croissante :

pour tout n de N, $v_{n+1} - v_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)(n+1) - n(n+2)}{(n+2)(n+1)}$

$= \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0$

car $1 > 0$ et $(n+2)(n+1) > 0$ puisque $n \geq 0$

donc (v_n) est croissante.

démontrons que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$

$u_n - v_n = 1 + \frac{1}{n!} - \frac{n}{n+1}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n!}$ = tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ car $\lim\limits_{n \to \infty} n! = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{n} = 1$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$

(u_n) est décroissante et (v_n) est croissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$ donc les 2 suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes

Corrigé 2:

démontrons que (u_{2p}) est décroissante :

pour tout p de N*, $u_{2(p+1)} - u_{2p} = 1 + \frac{(-1)^{2(p+1)}}{2(p+1)} - 1 - \frac{(-1)^{2p}}{2p} = \frac{1}{2(p+1)} - \frac{1}{2p} = \frac{2p - (2p+2)}{2p(2p+2)}$

$= - \frac{2}{2p(2p+1)} < 0$ car $2 > 0$ et $2p(2p+1) > 0$ car $p > 0$

donc (u_{2p}) est décroissante.

démontrons que (u_{2p+1}) est croissante :

pour tout n de N, $u_{2(p+1)+1} - u_{2p+1} = 1 + \frac{(-1)^{2p+3}}{2p+3} - 1 - \frac{(-1)^{2p+1}}{2p+1} = \frac{-1}{2p+3} - \frac{-1}{2p+1} = \frac{-2p - 1 + 2p + 3}{(2p+3)(2p+1)}$

$= \frac{2}{(2p+3)(2p+1)} < 0$ car $2 > 0$ et $(2p+3)(2p+1) > 0$ car $p > 0$

donc (u_{2p+1}) est croissante.

Suites adjacentes : cours et applications

démontrons que $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2p} - u_{2p+1} = 0$

$$u_{2p} - u_{2p+1} = 1 + \frac{(-1)^{2p}}{2p} - 1 - \frac{(-1)^{2p+1}}{2p+1} = 1/2p + 1/2p+1 = \frac{2p+1+2p}{2p(2p+1)} = \frac{4p+1}{4p^2+2p}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4p+1}{4p^2+2p} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{p} = 0$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2p} - u_{2p+1} = 0$

(u_{2p}) est décroissante et (u_{2p+1}) est croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2p} - u_{2p+1} = 0$ donc les 2 suites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) sont adjacentes

Corrigé 3:

démontrons que (u_n) est croissante :

pour tout n de N*, $u_{n+1} - u_n = \sum\limits_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i^2} - \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$

donc (u_n) est croissante.

démontrons que (v_n) est décroissante :

pour tout n de N*, $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$

$$= \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} = -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0$$

donc (v_n) est décroissante.

démontrons que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n - v_n = 0$

$u_n - v_n = \frac{1}{n}$. Or $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ car $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n - v_n = 0$

(u_n) est croissante et (v_n) est décroissante et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n - v_n = 0$ donc les 2 suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes

Suites adjacentes : cours et applications

Corrigé 4:

démontrons que (u_n) est croissante :

pour tout n de N*, $u_{n+1} - u_n = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i\,!} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\,!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ car $1 > 0$ et $(n+1)! > 0$

donc (u_n) est croissante.

démontrons que (v_n) est décroissante :

pour tout n de N*, $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1) * (n+1)\,!} - u_n - \frac{1}{n * n\,!}$

$$= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1) * (n+1)\,!} - \frac{1}{n * n\,!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1) * (n+1)\,!} - \frac{1}{n * n\,!}$$

$$= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1) * (n+1)!} = - \frac{1}{n(n+1) * (n+1)!} < 0$$

donc (v_n) est décroissante.

démontrons que $\lim_{n \to \infty} u_n - v_n = 0$

$u_n - v_n = \frac{1}{n\,.\,n!}$. Or $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n\,.\,n!} = 0$ car $\lim_{n \to \infty} n\,.\,n\,! = +\infty$ donc $\lim_{n \to \infty} u_n - v_n = 0$

(u_n) est croissante et (v_n) est décroissante et $\lim_{n \to \infty} u_n - v_n = 0$ donc les 2 suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes