REPUBLIQUE TUNISIENNE EXAMEN DE BACCALAUREAT SESSION 2019	**Session principale**	
	Epreuve : **Mathématiques**	Section : **Sciences Techniques**
	Durée : **3 h**	Coefficient de l'épreuve : **3**

Exercice n° 1 4points

I-

1) **b)**

2) **c)**

II-

1) **a)**

2) **b)**

Exercice n° 2 4 points

1) Soit, dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E): z^2-(1+i\sqrt{3})(1-i)z+2\sqrt{3}=0$.

a) Vérifier que $(1-i)$ est une solution de l'équation (E).

b) Déduire l'autre solution de l'équation (E).

Solution :

1) a) $(1-i)^2-(1+i\sqrt{3})(1-i)(1-i)+2\sqrt{3}=-2i+2i(1+i\sqrt{3})+2\sqrt{3}=-2i+2i-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}=0$

Donc $(1-i)$ est une solution de (E).

b) On pose $z_1=1-i$ et z_2 l'autre solution de (E).

$$z_1\times z_2=\frac{2\sqrt{3}}{1}\Leftrightarrow z_2=\frac{2\sqrt{3}}{z_1}=\frac{2\sqrt{3}}{1-i}=\frac{2\sqrt{3}(1+i)}{2}=\sqrt{3}+i\sqrt{3}$$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=1-i$, $z_B=\sqrt{3}+i\sqrt{3}$ et $z_C=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

a) Donner la forme exponentielle de chacun des nombres complexes z_A et $(1+i\sqrt{3})$.

b) Vérifier que $z_B=(i\sqrt{3})z_A$.

c) Déduire que $z_A+z_B=z_C$.

d) Montrer que le quadrilatère OACB est un rectangle.

Solution :

2) a) $z_A=1-i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$z_B=\sqrt{3}+i\sqrt{3}=i\sqrt{3}\left(\frac{1}{i}+1\right)=i\sqrt{3}(1-i)=i\sqrt{3}z_A$$

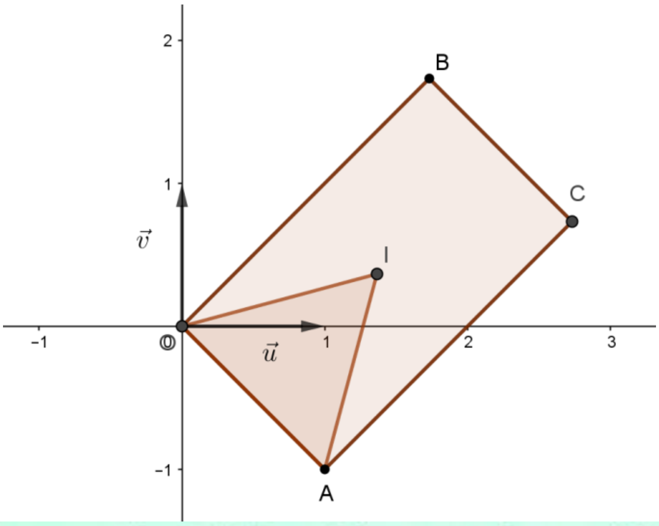
c) $z_A + z_B = z_A + i\sqrt{3}z_A = z_A\left(1+i\sqrt{3}\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \times 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = z_C$

d) $z_A + z_B = z_C \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ donc OACB est un parallélogramme

$z_B = i\sqrt{3}z_A \Leftrightarrow \dfrac{z_A}{z_B} = i\sqrt{3} \Leftrightarrow \dfrac{z_{\overrightarrow{OA}}}{z_{\overrightarrow{OB}}} = i\sqrt{3}$ donc $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ d'où OACB est rectangle

e) Dans la **figure 1** de l'annexe on a placé le point B. Placer le point A et construire le point C.

e)



3) Soit I le centre du rectangle OACB et G le centre de gravité du triangle OAI.

a) Montrer que $z_G = \frac{1}{3}(z_I + z_A)$.

b) Montrer que $z_G = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt{3}+i\right)z_A$.

c) Déduire la forme exponentielle de z_G.

Solution :

3) a) G est le centre de gravité du triangle OAI donc

$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{IG} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow z_G - z_A + z_G + z_G - z_I = 0 \Leftrightarrow 3z_G = z_A + z_I$. D'où $z_G = \frac{1}{3}(z_A + z_I)$

b) $z_G = \frac{1}{3}(z_A + z_I) = \frac{1}{3}\left(z_A + \frac{z_A + z_B}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(z_A + \frac{z_A + i\sqrt{3}z_A}{2}\right) = \frac{1}{3}z_A\left(1 + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \frac{1}{3}z_A\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt{3}+i\right)z_A$.

c) $z_G = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt{3}+i\right)z_A = \frac{\sqrt{3}}{6} \times 2e^{i\frac{\pi}{3}} \times \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{3}e^{i\frac{\pi}{12}}$

Exercice n° 3 **5 points**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(2,-2,2)$, $B(2,0,0)$ et $C\left(\frac{6}{5},0,\frac{2}{5}\right)$.

1) a) Montrer que ABC est un triangle rectangle en C.

b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x+2y+2z-2=0$

Solution :

1) a) $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\-2\\\frac{8}{5}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\0\\-\frac{2}{5}\end{pmatrix}$ on a $\frac{16}{25}+0-\frac{16}{25}=0$ donc $\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$ Ainsi le triangle ABC est rectangle en C

b) $A(2,-2,2)$ donc $2-4+4-2=0$ d'où les coordonnées du point A vérifient l'équation $x+2y+2z-2=0$

$B(2,0,0)$ donc $2+0+0-2=2-2=0$ d'où les coordonnées du point B vérifient l'équation $x+2y+2z-2=0$.

$C\left(\frac{6}{5},0,\frac{2}{5}\right)$ donc $\frac{6}{5}+2\times0+\frac{4}{5}-2=\frac{10}{5}-2=2-2=0$ d'où les coordonnées du point C vérifient l'équation $x+2y+2z-2=0$

Et comme A,B et C non alignés donc l'équation du plan (ABC) est $x+2y+2z-2=0$.

2) Soit Δ la droite perpendiculaire au plan (ABC) en A.

a) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ.

b) On considère le plan P dont une équation cartésienne est : $4x+8y-z-8=0$.

Montrer que la droite Δ coupe le plan P au point $I(3,0,4)$.

c) Soit S la sphère tangente au plan (ABC) en A et dont le centre appartient au plan P.

Montrer que la sphère S a pour centre le point I puis calculer son rayon R.

Solution :

2) a) Δ est perpendiculaire au plan (ABC) donc $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ le normal à (ABC) est un directeur de Δ

donc $\Delta:\begin{cases}x=2+\alpha\\y=-2+2\alpha\\z=2+2\alpha\end{cases}\quad \alpha\in IR$

b) $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ le vecteur directeur de Δ et $\overrightarrow{n_P}\begin{pmatrix}4\\8\\-1\end{pmatrix}$ le normal à P. $\frac{4}{1}\neq\frac{-1}{2}$ donc $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n_P}$ ne sont pas colinéaires et par suite Δ et P sont sécants.

Soit $I(3,0,4)$ on a $\begin{cases}3=2+\alpha\\0=-2+2\alpha\\4=2+2\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1\\2\alpha=2\\2\alpha=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1\\\alpha=1\\\alpha=1\end{cases}$ donc $I\in\Delta$

$4\times3+8\times0-4-8=12-12=0$ donc $I\in P$

D'où $\{I\}=P\cap\Delta$

c) La sphère S tangente au plan (ABC) en A donc son centre est un point de la droite perpendiculaire au plan (ABC) et qui passe par A donc le centre de S est un point de Δ et comme le centre appartient à P d'où le centre de S est le point d'intersection de Δ et P.

on a $\{I\}=P\cap\Delta$ donc S de centre I et de rayon $R=IA=\sqrt{(2-3)^2+(-2)^2+(4-2)^2}=\sqrt{1+4+4}=\sqrt{9}=3$

3) a) Montrer que le triangle CIB est rectangle en C.

b) Soit J le milieu du segment $[IB]$.

Montrer que les points I, B, A et C appartiennent à la sphère S' de centre J et de rayon $\frac{IB}{2}$.

c) Montrer que la sphère S' coupe le plan (ABC) suivant le cercle de diamètre $[AB]$.

Solution :

3) a) $\overrightarrow{CI}\begin{pmatrix}\frac{9}{5}\\0\\\frac{18}{5}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\0\\-\frac{2}{5}\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{CB}=\frac{36}{25}+0-\frac{36}{25}=0$ donc $\overrightarrow{CI}\perp\overrightarrow{CB}$ d'où le triangle CIB est rectangle en C.

b) le triangle CIB est rectangle en C donc les points I, B et C appartiennent à la sphère de diamètre [IB] donc comme J est le milieu de [IB]donc I, B et C appartiennent à la sphère S' de centre J et de rayon $\frac{IB}{2}$.

D'autre part la droite Δ est perpendiculaire au plan (ABC) en A et I $\in\Delta$ donc le triangle AIB est rectangle en A d'où les points I, B et A appartiennent à la sphère S' de diamètre [IB]
Ainsi le points I, B, A et C appartiennent à a sphère S'.

c) les points A, B et C $\in$S' donc la sphère S' coupe le plan (ABC) suivant le cercle circonscrit $\mathscr{C}$ au triangle ABC et comme ABC est rectangle en C donc $\mathscr{C}$ de diamètre [AB]

Exercice n° 4 **7 points**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-x+1}-e^{x-3}$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Dans la **figure 2** de l'annexe on a tracé la courbe (C') de la fonction f', dérivé de f, qui admet une seule tangente horizontale celle au point de coordonnées $(2,-2e^{-1})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter les résultats.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter les résultats.

Solution :

1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x+1}-e^{x-3}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{-x+1}-e^{x-3}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{-x+1}}{x}-\frac{e^{x}}{x}e^{-3}=-\infty$

La courbe (C) admet une branche infinie parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x+1}-e^{x-3}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{-x+1}-e^{x-3}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e}{xe^{x}}-\frac{e^{x-3}}{x}=+\infty$

La courbe (C) admet une branche infinie parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$

2) a) Déterminer $f'(x)$ pour $x\in\mathbb{R}$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

c) Calculer $f(2)$ et déduire le signe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Solution :

2) a) la fonction f est dérivable sur IR et $\forall x\in IR,\ f'(x)=-e^{-x+1}-e^{x-3}$

b) $\forall x\in IR,\ f'(x)=-\left(e^{-x+1}+e^{x-3}\right)<0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

c) $f(2)=e^{-2+1}-e^{2-3}=e^{-1}-e^{-1}=0$

$$\begin{cases}\forall x\in\left]2,+\infty\right[,f(x)<0\\ \forall x\in\left]-\infty,2\right[,f(x)>0\end{cases}$$

3) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f''(x) = f(x)$.

b) Déduire que le point $I(2,0)$ est un point d'inflexion de la courbe (C).

c) Montrer que la tangente T à la courbe (C) au point I a pour équation cartésienne

$y = -2e^{-1}x + 4e^{-1}$ et vérifier que le point de coordonnée $(3, -2e^{-1})$ est un point de T.

Solution :

3) a) $\forall x \in IR,\ f'(x) = -e^{-x+1} - e^{x-3}$ et f' est dérivable sur IR

Donc $\forall x \in IR,\ f''(x) = -(-e^{-x+1}) - e^{x-3} = e^{-x+1} - e^{x-3} = f(x)$

b) $\forall x \in IR,\ f''(x) = f(x)$ D'après 2)c) f '' s'annule en changeant de signe au point 'abscisses 2 donc le point $I(2,0)$ est un point d'inflexion de la courbe (C) de f.

c) $T : y = f'(2)(x-2) + f(2)$ donc $T : y = -2e^{-1}(x-2) = -2e^{-1}x + 4e^{-1}$.

$-2e^{-1} \times 3 + 4e^{-1} = -6e^{-1} + 4e^{-1} = -2e^{-1}$ donc le point de coordonnées $(3, -2e^{-1})$ est un point de T.

4) a) Montrer que la courbe (C) est au dessus de la courbe (C')

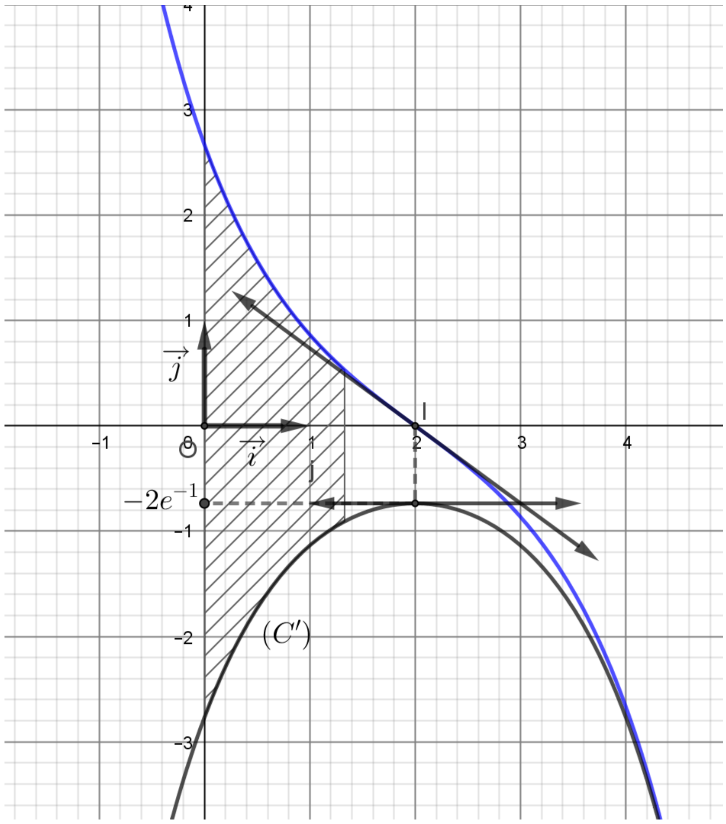
b) Tracer la droite T et la courbe (C).

Solution :

4) a) $\forall x \in IR,\ f(x) - f'(x) = e^{-x+1} - e^{x-3} + e^{-x+1} + e^{x-3} = 2e^{-x+1} > 0$

Donc la courbe (C) est au-dessus de la courbe (C').

b)



5) Soit λ un réel strictement positif. On désigne par A_λ l'aire, en u.a, de la partie du plan limitée par les courbes (C) et (C') et les droites d'équations $x=0$ et $x=\lambda$.

a) Calculer A_λ.

b) Déterminer alors $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A_\lambda$.

5)a) $A_\lambda = \int_0^\lambda \left|f(x)-f'(x)\right|dx = \int_0^\lambda f(x)-f'(x)\ dx = \int_0^\lambda 2e^{-x+1}\ dx = \left[-2e^{-x+1}\right]_0^\lambda = 2e-2e^{-\lambda+1}$ u.a

b) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A_\lambda = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} -2e^{-\lambda+1}+2e = 2e$