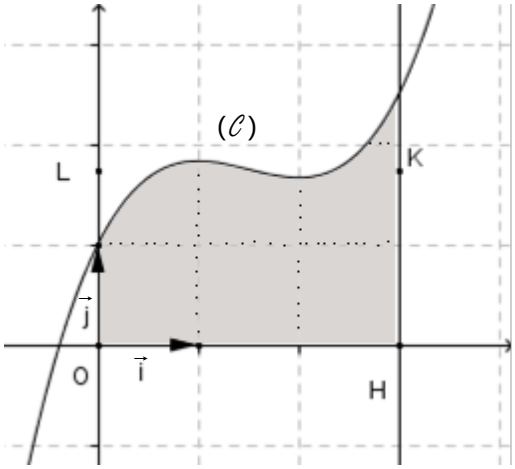
Lycée IBN KHALDOUN RADES Mr. ABIDI Farid	DEVOIR DE CONTROLE N°2 MATHEMATIQUES	Classes:4 M 1 & 2 Durée : 2h Date : 11-02-2009

Exercice 1- (3 points)

Pour chaque affirmation dire, sans justification, si elle est **vraie** ou **fausse**.

1. On considère f la fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ et dont la courbe représentative $(\mathscr{C})$ est donnée ci-contre et tracée dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Les points L et K n'ont même ordonnée $\frac{7}{4}$.



a) $\int_0^2 f(x)dx \in [2,4]$.

b) Sachant que l'aire, en ua, grisée sur la figure est égale à l'aire, en ua, du rectangle OHKL, la valeur moyenne de f sur l'intervalle[0,3] est : $\bar{f} = \frac{21}{4}$.

2. Si $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \sin t.\cos 3t\, dt$ alors I = 0.

3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. Soit A(a) et $a \in \mathbb{C}^*$ l'écriture complexe de :

a) la symétrie orthogonale d'axe (OA) est : $z' = \frac{a}{\bar{a}}\bar{z}$.

b) L'homothétie de centre O et de rapport $|a|$ est : $z' = a\bar{a}z$.

c) la similitude indirecte de centre O, de rapport 2 et d'axe (OA) est : $z' = -2\frac{a}{\bar{a}}\bar{z}$.

Exercice 2 - (6 points)

1. Soit f la fonction définie sur l'intervable $I = \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \int_0^{\tan x} \frac{dt}{\left(1+t^2\right)^2}$.

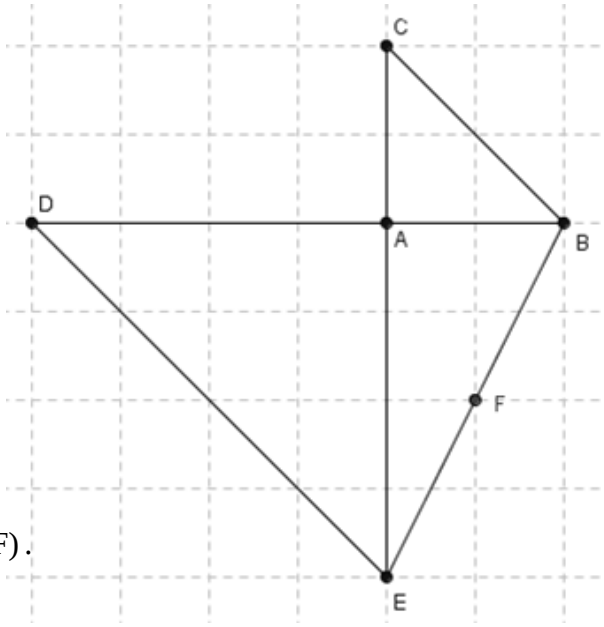
   a) Montrer que f est dérivable sur I et déterminer sa fonction dérivée f '.

   b) En déduire que pour tout x de I , $f(x) = \int_0^x \cos^2 t\, dt$

   c) Expliciter f(x) pour tout x de I puis calculer l'intégrale $A = \int_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$.

2. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale, $B = \int_0^1 \frac{x^2\, dx}{\left(1+x^2\right)^3}$

Exercice 3 - (6 points)



Dans la figure ci contre, ABC et ADE sont deux triangles isocèles et rectangle tels que : AB = 1 , AD = 2 , $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.
On note F le milieu du segment [BE].

1. Soit f la similitude directe qui transforme A en C et D en A.
   a) Préciser le rapport et l'angle de f.
   b) Déterminer les images par f des droites (CD) et (AF).
   c) Déterminer et construire le centre I de f.

2. Soit $g = S_\Delta \circ f^{-1}$ où S_Δ désigne la symétrie orthogonale d'axe (Δ) la médiatrice du segment [BC].
   a) Déterminer g(C) et g(A).
   b) Prouver que g est une similitude indirecte dont on précisera le rapport.
   c) Soit G le symétrique de A par rapport à C. Montrer g(G) = G.
   d) Caractériser g.

Exercice 4 -(5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

On considère la courbe $(\mathcal{C})$ d'équation : $x^2 - y^2 - x - 2 = 0$.

1. a) Prouver que $(\mathcal{C})$ est une hyperbole dont on déterminera le centre, les sommets et les foyers.
   b) Tracer $(\mathcal{C})$ et ses asymptotes.

2. Soit E le point de $(\mathcal{C})$ d'abscisse 3 et d'ordonnée positive.
   a) Ecrire une équation de la tangente (T) en E à $(\mathcal{C})$.
   b) La droite (T) coupe les asymptotes de $(\mathcal{C})$ en G et H. Prouver que E est le milieu de [GH].

3. Calculer le volume, en unité de volume, engendré par la rotation de l'arc $\overset{\frown}{AE}$ de la courbe $(\mathcal{C})$ autour de l'axe des abscisses où A est un sommet de $(\mathcal{C})$.

Corrigé

Exercice 1 :

1. a) Vrai ; b) Faux
2. Vrai
3. a) Vrai ; b) Faux ; c) Faux

Exercice 2 :

1. a) Soit u la fonction définie sur I= $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par $u(x)=\tan x$.

   ✓ u est dérivable sur I

   ✓ Pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan x\in\mathbb{R}$ donc $u(I)=\mathbb{R}$

   ✓ La fonction $x\mapsto\frac{1}{(1+x^2)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$

   Donc f est dérivable sur I et pour tout x de I,

$$f'(x)=u'(x).\frac{1}{\left(1+(u(x))^2\right)^2}=\frac{1+\tan^2 x}{(1+\tan^2 x)^2}=\frac{1}{1+\tan^2 x}=\cos^2 x\,.$$

   b) Comme $f(0)=\int_0^0\frac{dt}{(1+t^2)^2}=0$ alors f est la primitive sur $1+\tan^2 x$ de la fonction $t\mapsto\cos^2 t$

   qui s'annule en 0. Par suite, pour tout x de I, $f(x)=\int_0^x\cos^2 t\,dt$.

   c) Pour tout x de I, $f(x)=\int_0^x\cos^2 t\,dt=\int_0^x\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\left[\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^x=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x$.

   Il en résulte que $A=\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\int_0^{\tan\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{(1+x^2)^2}=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$.

2. Soit $B=\int_0^1\frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^3}=\int_0^1 x.\frac{x}{(1+x^2)^3}dx$

   On pose :

$$u(x)=x \qquad u'(x)=1$$

$$v'(x)=\frac{x}{(1+x^2)^3}=\frac{1}{2}.\frac{2x}{(1+x^2)^3} \qquad v(x)=-\frac{1}{2}.\frac{1}{2(1+x^2)^2}=-\frac{1}{4(1+x^2)^2}$$

Corrigé

On obtient : $B = \left[-\frac{x}{4\left(1+x^2\right)^2}\right]_0^1 + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} = -\frac{1}{16}+\frac{1}{4}A = -\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{\pi}{32} = \frac{\pi}{32}$.

Exercice 3 :

1. a) Le rapport de f est $\frac{CA}{AD} = \frac{AB}{AD} = \frac{1}{2}$.

On a : $\left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CA}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}}\right)[2\pi] \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CA}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc l'angle de f est $\frac{\pi}{2}$.

b) $f\left((CD)\right)$ est la perpendiculaire à la droite (CD) passant par f(D) = A

et $f\left((AF)\right)$ est la perpendiculaire à la droite (AF) passant par f(A) = C.

Montrons que (CD) et (AF) sont perpendiculaires :

On a : F est milieu de [BE] $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}\right)$ et $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$

donc $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}\right)\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(-2-0+0-(2)\right) \qquad = 0$

Par suite, les droites (CD) et (AF) sont perpendiculaires.

Il en résulte : $f\left((CD)\right) = (AF)$ et $f\left((AF)\right) = (CD)$.

c) Désignons par J le point d'intersection des droites (CD) et (AF),

$\{f(J)\} = f\left((CD)\right) \cap f\left((AF)\right) = (AF) \cap (CD) = \{J\}$.

Ainsi, J est un point fixe de f donc I = J.

2. a) $g(C) = S_\Delta \circ f^{-1}(C) = S_\Delta(A) = A$ et $g(A) = S_\Delta \circ f^{-1}(A) = S_\Delta(D) = E$.

b) g est la composée d'une similitude indirecte de rapport 1 et d'une similitude directe de rapport 2 donc g est une similitude indirecte de rapport 2.

c) Désignons par G' l'image de G par g,

G est le symétrique de A par rapport à C $\Leftrightarrow$ C est le milieu du segment [AG]

$\Leftrightarrow$ A est le milieu du segment $g\left([AG]\right) = [EG']$

Or A est le milieu du segment [EG] donc $G' = G$.

Ainsi, g(G) = G.

d) G est une similitude indirecte de centre **G** et de rapport **2**.

Corrigé

Comme g(A) = E et $\overrightarrow{GE} = 2\overrightarrow{GA}$ alors l'axe de g est la droite **(AE)**.

Exercice 4 :

1. $x^2 - y^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - y^2 - 2 - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - y^2 = \frac{9}{4}$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}} - \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1$$

On pose $\begin{cases} X = x - \frac{1}{2} \\ Y = y \end{cases}$ et $I\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

On obtient $(\mathscr{C})$: $\frac{X^2}{\frac{9}{4}} - \frac{Y^2}{\frac{9}{4}} = 1$ dans le repère $\left(I, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Donc $(\mathscr{C})$ est une hyperbole **équilatère** de centre $I\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ et d'axe focal $\left(I, \vec{i}\right) = \left(O, \vec{i}\right)$ avec

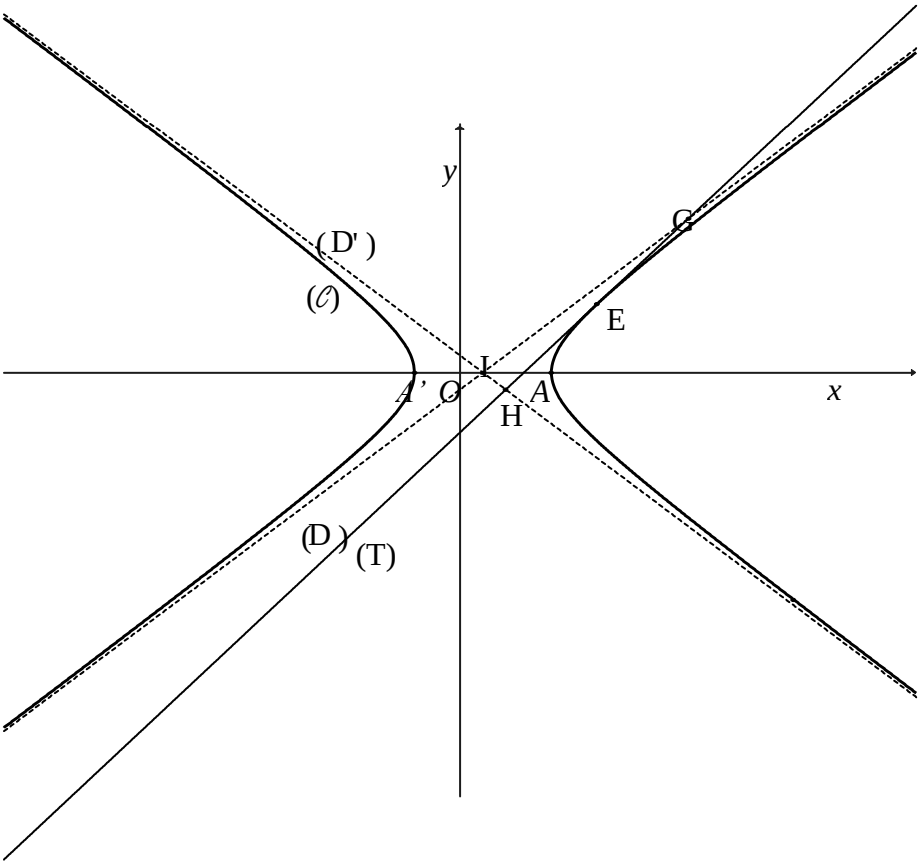
$a^2 = b^2 = \frac{9}{4}$ et $c = a\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

	Dans $\left(I, \vec{i}, \vec{j}\right)$	Dans $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$
Sommets	$A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ et $A'\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$	$A(2,0)$ et $A'(-1,0)$
Foyers	$F\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} ; 0\right)$ et $F'\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; 0\right)$	$F\left(\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} ; 0\right)$ et $F'\left(\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} ; 0\right)$

b) Les asymptotes de $(\mathscr{C})$:

	Dans $\left(I, \vec{i}, \vec{j}\right)$	Dans $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$
Asymptotes	D : Y = X et D' : Y = -X	$D : y = x - \frac{1}{2}$ et D' : $y = -x + \frac{1}{2}$

Corrigé



2. a) Pour x = 3, $x^2 - y^2 - x - 2 = 0$ devient $y^2 = 4$ donc E(3, 2).

	Dans $(I, \vec{i}, \vec{j})$	Dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$
Point E	$E\left(\frac{5}{2}, 2\right)$	E(3, 2)
Tangente (T)	$T : \frac{\frac{5}{2}X}{\frac{9}{4}} - \frac{2Y}{\frac{9}{4}} = 1$ $\Leftrightarrow T : \frac{10}{9}X - \frac{8}{9}Y = 1$ $\Leftrightarrow T : 10X - 8Y - 9 = 0$	$T : 10\left(x - \frac{1}{2}\right) - 8y - 9 = 0$ $\Leftrightarrow T : 10x - 8y - 14 = 0$ $\Leftrightarrow T : 5x - 8y - 7 = 0$

b) $T \cap D = \left\{G\left(5, \frac{9}{2}\right)\right\}$ et $T \cap D' = \left\{H\left(1, -\frac{1}{2}\right)\right\}$ donc le milieu de [GH] a pour coordonnées $(3, 2)$ donc E est le milieu du segment [GH].

3. Le volume, en uv, engendré par rotation de l'arc $\overset{\frown}{AE}$ de l'hyperbole (𝒞) autour de l'axe des abscisses est : $V = \pi\int_2^3 y^2 dx = \pi \int_2^3 (x^2 - x - 2)dx = \pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right]_2^3 = \frac{11\pi}{6}$