Exercice 1

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points A$(0\ ,-1\ ,\ 0)$; B$(1\ ,\ 1\ ,\ 0)$ et C$(0\ ,\ 0\ ,\ 1)$.

1. ⓐ Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
   ⓑ En déduire que les points A, B et C définissent un plan P.
   ⓒ Vérifier qu'une équation cartésienne du plan P est : $2x - y + z - 1 = 0$.

2. On considère le plan Q: $x + y - 2z + 1 = 0$. Montrer que les plans P et Q sont sécants et que leur intersection est la doite $\Delta : \begin{cases} x = \alpha \\ y = 5\alpha - 1 \\ z = 3\alpha \end{cases} \ ;\alpha \in \mathbb{R}$.

3. Soit S l'ensemble des points M(x , y , z) vérifiant : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z + \frac{4}{3} = 0$
   ⓐ Montrer que S est une sphère de centre le point I$(-1\ ,\ 0\ ,\ 1)$. Déterminer son rayon.
   ⓑ Montrer que la sphère S est tangente à chacun des plans P et Q.

4. Soient J et K les points de contacts respectifs de la sphère S avec les plans P et Q.
   ⓐ Justifier que plan (IJK) est perpendiculaire à chacun des plans P et Q.
   ⓑ Monter qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est : $x + 5y + 3z - 2 = 0$.
   ⓒ Déterminer les coordonnées du point L, intersection des plans P, Q et (IJK).

Exercice 2

1. ⓐ Vérifier que $\left(\sqrt{2} + 2i\right)^2 = -2 + 4i\sqrt{2}$.
   ⓑ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2 - \left(\sqrt{2} + 2\right)z + 2 + \sqrt{2} - i\sqrt{2} = 0$.

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on donne les points A, B, C et D d'affixes respectives: $z_A = 1$, $z_B = 1 - i$ et $z_C = 1 + \sqrt{2} + i$ et $z_D = \sqrt{2} + 2i$.
   Dans l'annexe ci-jointe, **Figure 1** on a tracé un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon $\sqrt{6}$.
   ⓐ Vérifier que le point D appartient à $\mathscr{C}$ et construire D.
   ⓑ Montrer que le quadrilatère OBCD est un parallélogramme.
   ⓒ Construire alors le point C.

3. ⓐ Déterminer la forme exponentielle de z_B.
   ⓑ Montrer que $z_B.z_C = \sqrt{2}.\overline{z}_C$, et En déduire que $\arg(z_B) + 2\arg(z_C) \equiv 0\,[2\pi]$.
   ⓒ Déterminer la forme exponentielle de z_C et en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 3

Un médicament est injecté par voi intraveineuse. Dans les heures qui suivent, la substance est éliminée par les reins. La quantité q présente dans le sang (en milligrammes) à l'instant t (en heures) a été mesurée par des prises de sang toutes les deux heures.

t(heures)	0	2	4	6	8
q(mg)	9,9	7,5	5,5	3,9	3

Dans tout l'exercice les résultats seront arrondies à 10^{-2}.

1 a) Déterminer, le coefficient de corrélation linéaire entre t et q.

b) Ecrire une équation de la droite de régression de q en t.

c) On suppose que ce modèle reste valable pendant 12 heures, quelle estimation obtient-on de la quantité de médicament présente dans le sang au bout de 12 heures?

2 On pose $y = \ln(q)$ où ln désigne le logarithme népérien.

a) Recopier et compléter le tableau suivant .

t(heures)	0	2	4	6	8
y		2,01			1,10

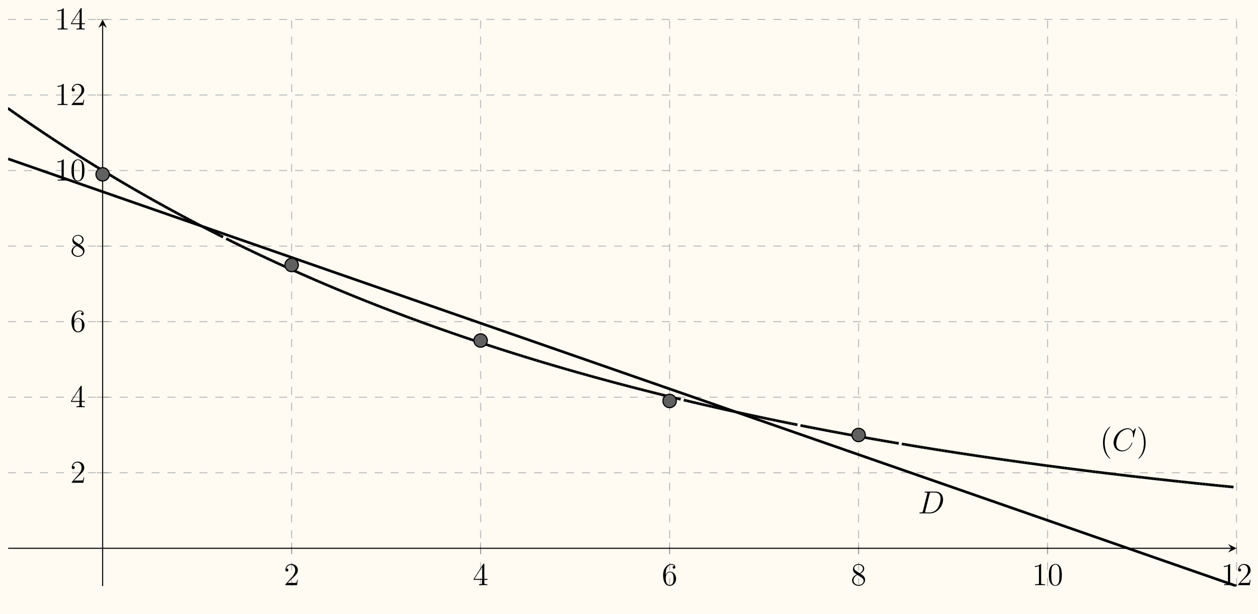
b) Calculer le coefficient de corrélation de la série (t , y). Interpréter le résultat.

c) Determiner, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de regression de y en t.

3 a) Déduire une écriture de q sous la forme $q = \beta e^{\alpha t}$.

b) On suppose de nouveau que ce modèle reste valable pendant 12 heures , calculer la quantité de médicament présente dans le sang au bout de 12 heures.

4 Dans la figure ci-dessous, on a représenté la droite D définie en 1)b), la courbe (C) d'équation $q = \beta e^{\alpha t}$ et le nuage de points de la série(t , q).



Le quel des deux ajustements proposés s'avère le plus adaptable à la situation?
Justifier la réponse.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par $f(x) = e^{\frac{1}{x}} + ln(x)$.

1 ⓐ Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. Interpreter graphiquement.

ⓑ Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpreter graphiquement.

ⓒ Vérifier que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$.

2 Dans l'annexe ci-jointe (**Fig.2**), $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ sont les courbes dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ des fonctions g et h définies sur $\left]0\ ,\ +\infty\right[$ par : $g(x) = \dfrac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$ et $h(x) = \dfrac{1}{x}$.
Les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ se coupent en un point d'abscisse β .

ⓐ Par lecture graphique donner le signe de $f'(x)$.

ⓑ Montrer que $ln(\beta) = \dfrac{1}{\beta}$. En déduire que $f(\beta) = \beta + \dfrac{1}{\beta}$.

ⓒ Dresser le tableau de variation de f .

3 On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

ⓐ Placer dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ le point $A\left(\beta\ ,\ f(\beta)\right)$.

ⓑ Vérifier que pour tout $t \geq 1$, $e^t - ln(t) \leq t^2 e^t$.
En déduire que pour tout $x \in \left]0,1\right]$ on a : $f(x) \leq g(x)$. (*__Indication__* : on pose $t = \dfrac{1}{x}$).
Déterminer alors la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ (On remarquera que $\mathscr{C}_f$ passe par le point B (1 , e)).

ⓒ On admettant que $\forall$ x > 0 , f(x) > h(x), déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_h$.

ⓓ Placer le point B et racer $\mathscr{C}_f$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

4 ⓐ Montrer que l'équation f(x) = e admet dans $\left[\beta\ ,\ +\infty\right[$ une unique solution α et que $4 < \alpha < 5$.

ⓑ On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan **S** limitée par les courbe $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = \alpha$.
Hachurer **S** et montrer que $\mathscr{A} = 2\left(e - \beta - \dfrac{1}{\beta}\right)$.

Annexe

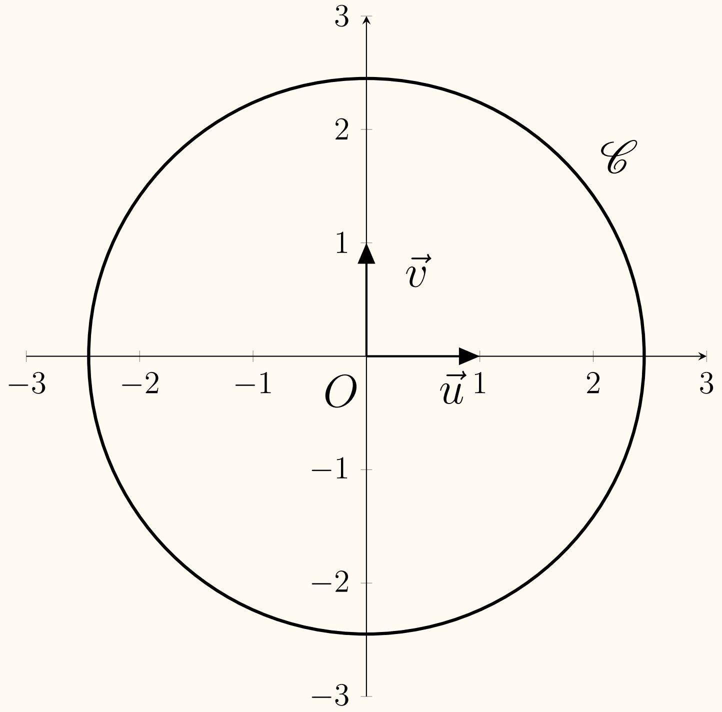


Figure 1

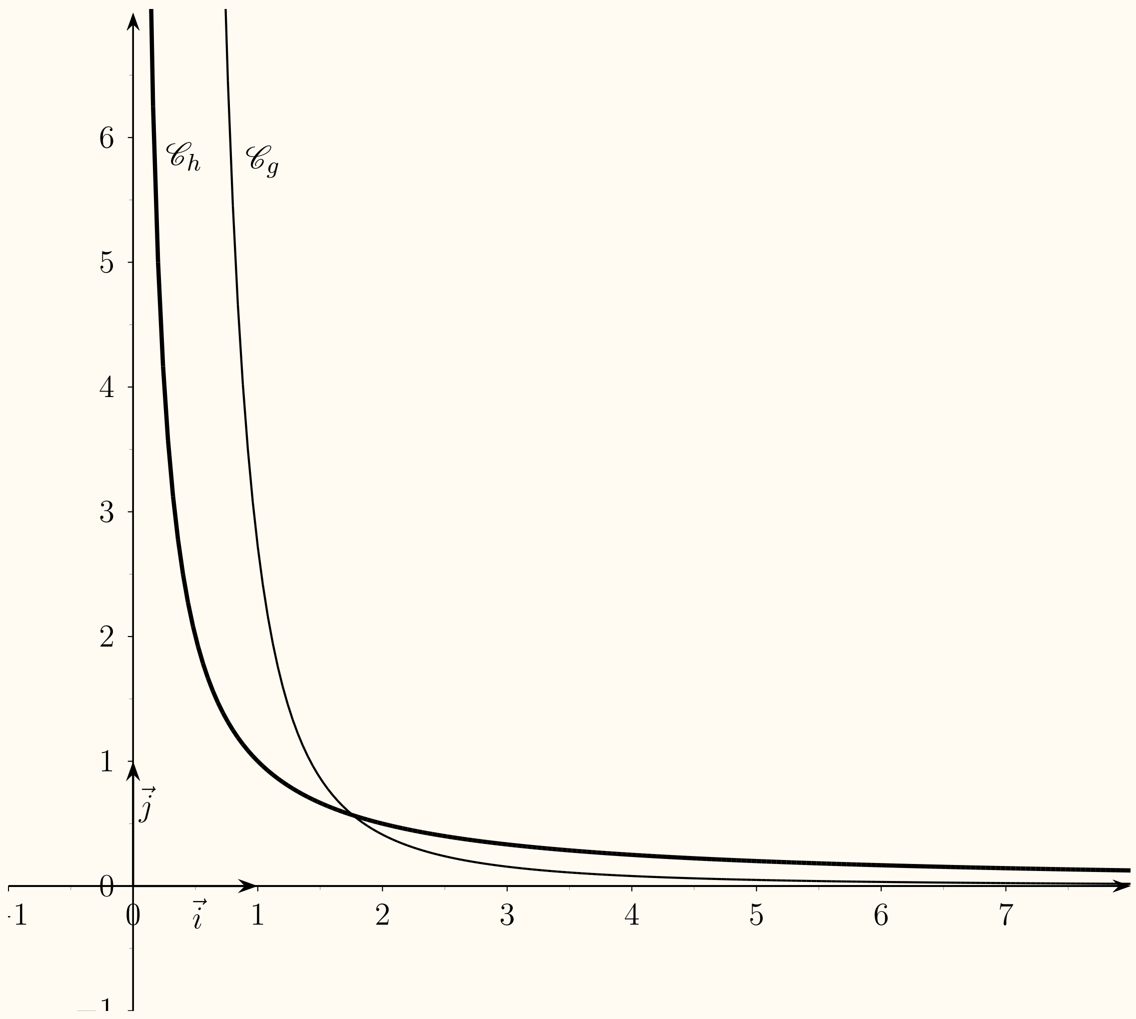


Figure 2