Exercice 1

(QCM)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est correcte.

1 Soient Het K deux points d'un cercle trigonométrique tel que : mes$(\widehat{HK}) \equiv -\dfrac{107\pi}{4}[2\pi]$.
La mesure de l'arc orienté $\widehat{HK}$ appartenant à l'intervalle $[0, 2\pi[$ est:

a $\frac{\pi}{4}$ b $\frac{3\pi}{4}$ c $\frac{5\pi}{4}$

2 Soient A et B deux points distincts.
L'ensemble des points M vérifiant $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{AB}})[2\pi]$ est :

a La droite $(AB)\backslash\{A, B\}$ b La demi-droite $[AB)\backslash\{A\}$ c La demi-droite $[BA)\backslash\{A, B\}$

3 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \equiv \dfrac{2022\pi}{7}[2\pi]$ La mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ est égale à :

a $\frac{6\pi}{7}$ b $-\frac{\pi}{7}$ c $\frac{2\pi}{7}$

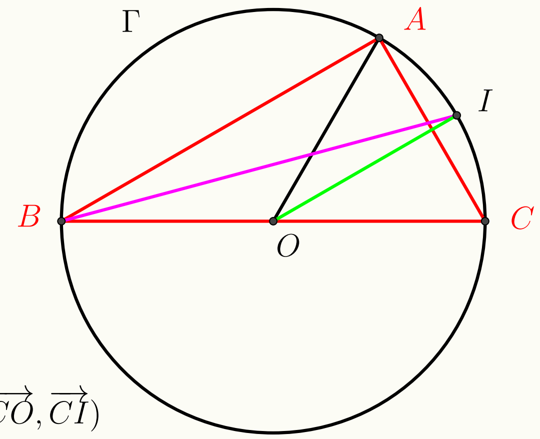
Exercice 2

Dans le plan orienté dans le sens direct , on considère les points A, B, C et D tels que : $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv -\dfrac{28\pi}{10}[2\pi]$, $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}}) \equiv -\dfrac{47\pi}{10}[2\pi]$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \dfrac{\pi}{5}[2\pi]$

1 Déterminer la mesure principale des angles orientés : $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}})$ et $(\overrightarrow{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}})$

2 Montrer que les points A. B et E sont alignés.

Exercice 3 ★★★☆



Dans la figure ci-contre :
ABC est un triangle rectangle en A inscrit dans un cercle Γ de centre O et de rayon 1 .
OAC est un triangle équilatéral.
I est un point de Γ tel que : $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BI}}) \equiv \dfrac{\pi}{12}[2\pi]$

1. Calculer $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}})$
2. a. Calculer $(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OI}})$ et en déduire $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CI}})$
   b. Montrer , en calculant $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{OI}})$, que les droites (AB) et (OI) sont parallèles.
3. a. Montrer que : $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OI} = \dfrac{OC^2+OI^2-IC^2}{2}$, en déduire la distance IC.
   b. Calculer BI^2 et $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BI}$ puis déduire la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

Exercice 4 ★★★☆

Dans le plan orienté dans le sens direct , on considère un triangle ABC isocèle en C tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \dfrac{\pi}{6}[2\pi]\cdot ACDE$, CBFG sont des carrés directs et Δ la médiatrice du segment $[AB]$

1. Faire une figure.
2. a. Trouver la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{CG},\overrightarrow{CD})$
   b. En déduire la nature du triangle CGD.
3. Calculer $(\widehat{\overrightarrow{CG},\overrightarrow{CA}})$. En déduire une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AG})$
4. On pose : $S_\Delta([CG)] = [Cx)$
   a. Montrer que : $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{Cx}}) \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$
   b. En déduire que les demi-droites $[CD)$ et $[Cx)$ sont confondues et que $S_\Delta(G) = D$
   c. Trouver alors la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}})$.
5. Les droites (BD) et (AG) se coupent en un point K. Montrer que K est un point de Δ puis donner la nature du triangle BAK.

Exercice 5

☆☆☆☆

Dans la figure ci-contre:
$\cdot[AB]$ est un segment tel que $AB = 6$.
$\cdot I$ est un point du segment $[AB]$ tel que $AI = 2$.

1. Déterminer et construire l'ensemble $\Gamma = \{M \in P \text{ tel que } (\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]\}$.

2. La perpendiculaire à (AB) passant par I coupe Γ en un point K. On note H lorthocentre du triangle AKB, la droite (AH) coupe (KB) en un point J.

   a. Montrer que les points I, H, J et B appartiennent à un même cercle Γ de diamètre $[BH]$.

   b. En déduire que : $(\widehat{\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{HJ}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BJ}}) + \pi[2\pi]$

   c. Montrer que : $(\widehat{\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{HJ}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{HK}, \overrightarrow{HA}})[2\pi]$

Exercice 6

☆☆☆☆

Dans le plan orienté dans le sens direct , on considère un triangle ABC rectangle en A tel que : $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

1. a. Déterminer la mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$

   b. Construire le triangle ABC.

2. Soit I le milieu de $[BC]$, la médiatrice Δ de $[BC]$ coupe la droite (AC) en un point J. Donner une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BJ}})$

3. a. Montrer que les points A, B, I et J appartiennent à un même cercle Γ de centre O.

   b. Donner une mesure de chacun des angles $(\widehat{\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JA}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IA}})$.

   c. Prouver que : $(\widehat{\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{JO}}) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

   d. Déduire l'ensemble des points M du plan tels que $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

4. Soit E le symétrique de H par rapport à la droite (AK) .
   Montrer que : $(\widehat{\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EK}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BK}}) + \pi[2\pi]$.

Exercice 7

Dans le plan orienté on considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de diamètre $[AA']$ tel que $OA = 4$. Soient les points B, D et E du cercle $\mathscr{C}$ tels que :
$(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = \dfrac{19\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}}) = -\dfrac{17\pi}{6} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$ et $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}}) = \dfrac{3\pi}{4} + 2k'\pi, k' \in \mathbb{Z}$

1. a. Déterminer la mesure principale de chacune des angles orientés : $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}})$
   b. Placer les points B, D et E.
2. Déterminer la mesure principale de : $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OA}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{EO}, \overrightarrow{DO}})$
3. $-\dfrac{143\pi}{8}$ est - elle une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE})$? justifier
4. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont orthogonaux.
5. Soit M le milieu du segment $[AB]$. Montrer que les points O , D et M sont alignés .