Série 2(4 ème Maths) : Nombres complexes

✍ Lahbib Ghaleb ✍

Exercice 1 ☆☆☆☆

1. a. Calculer $(1-2\sqrt{3}i)^2$.
   b. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - z + 3 + i\sqrt{3} = 0$.
   c. Mettre les solutions de (E) sous la forme exponentielle.
2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

   On considère les points A,B et M d'affixes respectives $i\sqrt{3}$, $1-i\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}\, e^{i\theta}$ où $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

   a. Montrer que $z_M - z_A = -2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\, e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$.
   b. En déduire la distance AM en fonction de θ.
   c. Déterminer θ de $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ pour que le triangle OAM soit isocèle en A.
3. On désigne par B' le symétrique de B par rapport à l'axe $\left(O, \overrightarrow{u}\right)$ et N le point du plan tel que OB'NM soit un parallélogramme.
   a. Déterminer l'affixe du point N.
   b. Déterminer l'ensemble des points N lorsque θ varie dans $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$

Exercice 2 ☆☆☆☆

Soit $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On considère l'équation, $(E_\theta) : z^2 - 2(i + \cos\theta)z + 1 + 2ie^{-i\theta} = 0$.
Soit z_1 et z_2 les solution de (E_θ) dans $\mathbb{C}$ et M_1 et M_2 leurs images respectives dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

1. Soit I le milieu du segment $[M_1M_2]$ et J le pont d'affixe z_1z_2.
   Déterminer les ensembles des points I et J quand θ décrit $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
2. a. Vérifier que $(i+\cos\theta)^2 - (1+2ie^{-i\theta}) = -(1+\sin\theta)^2$.
   b. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ).
3. On considère les points A,B et C d'affixes respectifs $a = i$, $b = e^{-i\theta}$ et $c = 2i + e^{i\theta}$.
   a. Vérifier que $c - a$ et $b - a$ sont conjugués.
   b. Ecrire sous forme exponentielle c-a.
   c. Déduire la valeur de θ pour que ABC soit équilatéral.

Exercice 3 ☆☆☆☆

Soit l'équation $E_\theta : z^2 - 2\cos(2\theta)z + 2i\sin(2\theta) = 0 ; \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$; l'équation : E_θ .
2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points : $M(e^{2i\theta} - 1) ; N(e^{-2i\theta} + 1) ; I(-1)$ et $A(-2)$.
   - a) Déterminer et construire l'ensemble E des points M lorsque θ varie dans $]0, \frac{\pi}{2}[$
   - b) Sachant que $Z_N = \overline{Z_M} + 2$, expliquer la construction de N à partir de M.
   - c) Construire les points M et N pour $\theta = \frac{\pi}{6}$
3. a) Ecrire chacun des nombres Z_M et Z_N sous la forme exponentielle.
   - b) En déduire que $(\widehat{\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM}}) \equiv 2\theta + \frac{\pi}{2} [2\pi]$
   - c) Pour quelle valeur de θ a-t- on M, O et N alignés ?
4. Soit $\theta \neq \frac{\pi}{4}$. Déterminer l'affixe du point P tel que OMPN soit un parallélogramme.

Exercice 4 ☆☆☆☆

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - (\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})z + 1 = 0$

1. a) Justifier que l'équation (E) possède deux solutions distinctes. (On ne demande pas de déterminer ces solutions).
   - b) Déterminer $z_1 + z_2$. En déduire que les solutions de l'équation (E) ne sont pas conjuguées. On désigne par z_1 , la solution telle que $|z_1| > 1$ et z_2 l'autre solution.

   On considère, dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, les points A, B, I et J d'affixes respectives $z_1, z_2, 1$ et -1.
2. a) Soit C le milieu du segment [AB]. Montrer que l'affixe du point C est $z_C = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}$.
   - b) En utilisant $(z_2 - z_1)^2 = (z_2 + z_1)^2 - 4z_1 z_2$, montrer que $(z_2 - z_1)^2 = 4(z_C^2 - 1)$.
   - c) Montrer que :$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CI}}) + (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CJ}}) \equiv 0 [2\pi]$ En déduire que la droite (AB) porte la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ICJ}$.
3. Soit $(\mathscr{C})$ le cercle circonscrit au triangle IAJ. On note K le centre de $(\mathscr{C})$ et z_K ,l'affixe du point K.
   - a) Prouver que K est un point de l'axe $\left(O, \vec{v}\right)$. On pose $z_K = iy$, où y est un réel non nul.
   - b) Soit M un point du plan d'affixe z.
     Justifier que $(M \in (\mathscr{C}))$ équivaut à $(|z - iy|^2 = |1 - iy|^2)$.
     En déduire que $(M \in (\mathscr{C}))$ équivaut à $(z\overline{z} + iy(z - \overline{z}) = 1)$.
   - c) En remarquant que $z_1 = \frac{1}{z_2}$, montrer que le point B appartient au cercle $(\mathscr{C})$.
4. a) Construire le point C dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
   - b) Construire la droite (AB) et la médiatrice du segment [AB].
   - c) Déduire une construction des points A et B, images des solutions de l'équation (E).