LYCEE SECONDAIRE SIDI ALI BEN AOUN	*Devoir de Synthèse N°1*
★★★★★★	*Classe : 3ème SC - EXP*
Mathématiques	*Durée : 2 h* — *Coefficient : 3*
14 - 12 - 2020	*PROF : GUEDRI JAMEL EDDINE*

Le sujet comporte trois pages de (1/3) à (3/3). La page (3/3) est à rendre avec la copie .

Exercice N°1 : (4 points)

Soit **f** la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 5x + 3}{4x - 4} & \text{si } x \leq 2 \\ \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

(1) Justifier que l'ensemble de définition de **f** est $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(2) **(a)** Montrer que pour tout $x \in]2,+\infty[$, on a : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}$.

(b) Calculer : $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$.

(c) En déduire que **f** est continue en **2** .

(3) La fonction **f** est - elle prolongeable par continuité en **1** ? justifier la réponse .

Exercice N°2 : (6 points)

Soit **f** la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+1}$.

(1) **(a)** Vérifier que la fonction **f** est paire puis interpréter graphiquement .

(b) Montrer que $\dfrac{1}{2}$ est le maximum de **f** sur $[0,+\infty[$.

(2) **(a)** Etudier le sens de variation de **f** sur $[0,+\infty[$.

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $f\left(\dfrac{n}{n+1}\right) < f\left(\dfrac{n}{n+2}\right)$.

(3) Montrer que **f** est continue sur $\mathbb{R}$.

(4) Pour tout réel **x** , on pose : $g(x) = f(x) - x^2$.

(a) Prouver que **g** est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ puis déterminer $g([0,1])$.

(b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0,1[$ une unique solution α et que $0,6 < \alpha < 0,7$.

(c) En déduire que la courbe de **g** coupe la parabole $P : y = x^2$ en deux points symétriques par rapport à l'axe des ordonnées .

Exercice N°3 : (4 points)

Le plan est orienté dans le sens direct .

Dans l'annexe ci-jointe **(figure 1)** :

- **ABC** est un triangle isocèle en **A** tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{149\pi}{12}+2k\pi \quad , k\in\mathbb{Z}$.
- Le point **I** est le milieu du segment $\left[BC\right]$.
- **ACE** est un triangle équilatéral direct .

(1) $\dfrac{19\pi}{12}$ est-elle une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$? justifier la réponse .

(2) Déterminer la mesure principale de chacun des angles orientés suivants : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}\right)$.

(3) Construire le point **D** tels que : $AB=AD$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=-\dfrac{\pi}{2}+2n\pi \quad , n\in\mathbb{Z}$.

(4) **(a)** Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BD}\right)$.

(b) En déduire que la droite $\left(AE\right)$ porte la hauteur issue de **A** dans le triangle **ABD** .

(5) Soit **J** le point du segment $\left[DE\right]$ tel que $\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AJ}\right)=\dfrac{11\pi}{24}+2k'\pi \quad , k'\in\mathbb{Z}$.

Montrer que les points **A** , **I** et **J** sont alignés .

Exercice N°4 : (6 points)

Dans l'annexe ci-jointe **(figure 2)** :

- **ABC** est un triangle équilatéral de centre **O** et de côté **3** .
- **I** et **J** les points tels que : $\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AJ}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

(1) **(a)** Calculer : $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{BC}$.

(b) En déduire que les droites $\left(BC\right)$ et $\left(IJ\right)$ sont perpendiculaires .

(2) Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des points **M** du plan vérifiant : $MA^2+MB^2+MC^2=18$.

(a) Vérifier que $OA=\sqrt{3}$.

(b) En déduire que pour tout point **M** du plan , on a : $MA^2+MB^2+MC^2=3\ MO^2+9$.

(c) Prouver alors que $\mathscr{C}$ est le cercle circonscrit au triangle **ABC** .

(3) Soit Δ l'ensemble des points **M** du plan vérifiant : $MB^2-MC^2=3$.

(a) Montrer que $IB=\sqrt{7}$ puis vérifier que **I** est un points de Δ .

(b) En déduire que Δ est la droite $\left(IJ\right)$.

(4) Soit **H** l'un des points d'intersection de Δ et $\mathscr{C}$. Montrer que $HA^2+2HB^2=21$.

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .
Nom et Prénom : . . . .
Date et lieu de naissance : . . . .

Signatures des surveillants
. . . .
. . . .

<u>Epreuve</u> : Mathématiques <u>Section</u> : 3ème Sciences expérimentales

<u>Annexe à rendre avec la copie</u>

<u>Exercice N°3</u> :

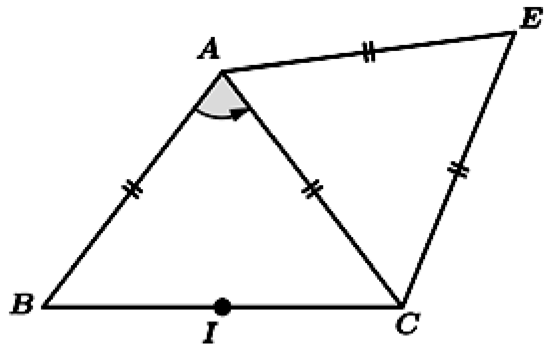

Figure 1

<u>Exercice N°4</u> :

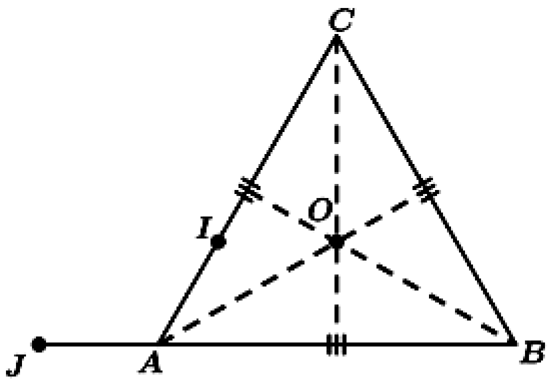

Figure 2